

CFL-Stabilitätsbedingung

K. Benkert¹, A. Stock²

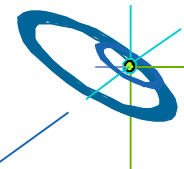
¹High Performance Computing Centre Stuttgart

www.hlrs.de

Universität Stuttgart

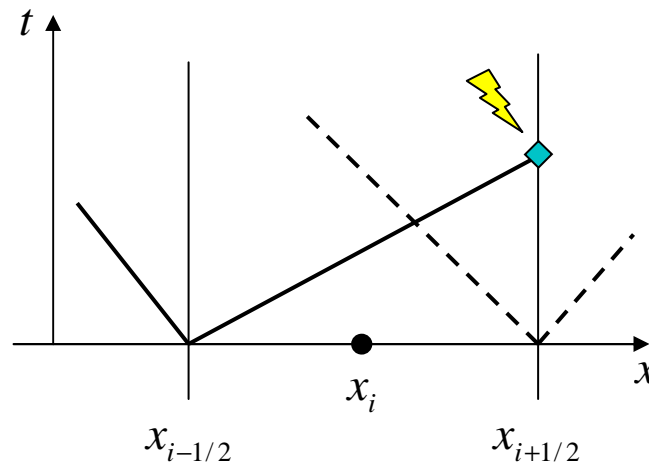
²Institut für Aerodynamik und Gasdynamik (IAG)

www.iag.uni-stuttgart.de

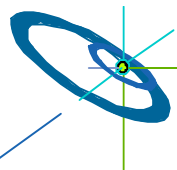


Zeitschrittwertensteuerung – die CFL-Bedingung

Explizite Zeitdiskretisierungen sind numerisch nur bedingt stabil, d. h. der maximale Zeitschritt ist beschränkt. Dies lässt sich anschaulich in 1D zeigen:

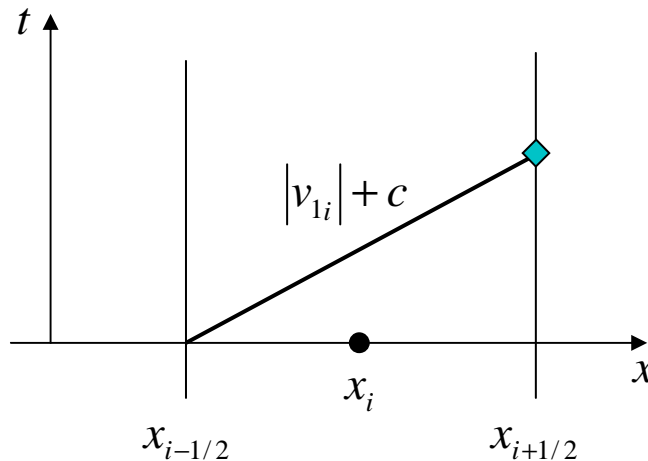


Für die Flussberechnung wird vorausgesetzt, dass der Zustand auf der Zellkante über die Dauer des Zeitschritts konstant ist. Dies ist jedoch nur so lange der Fall, wie keine andere Welle eines lokalen Riemannproblems an einer Zellgrenze auf eine benachbarte Zellgrenze trifft.



Ermittlung des maximalen Zeitschritts

Anschaulich wird also die Zeit gesucht, die die schnellste Welle von einer Kante zur nächsten benötigt:



$$\frac{\Delta t_i}{\Delta x_i} = \frac{1}{|v_{1i}| + c_i}$$

$$\Rightarrow \Delta t_i = \frac{\Delta x_i}{|v_{1i}| + c_i}$$

$$\Delta x_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$$

In der Praxis wird diese Zeit noch mit einem Faktor, der CFL-Zahl (benannt nach Courant, Friedrichs und Levy) multipliziert:

$$\Delta t_i = CFL \cdot \frac{\Delta x_i}{|v_{1i}| + c_i}$$



Globaler Zeitschritt / Lokaler Zeitschritt

Da die Zustände in den Zellen i. d. R. nicht gleich sind und die Zellgrößen über das Rechengebiet variieren, muss für jede Zelle der maximal möglich Zeitschritt ermittelt werden. Für die gesamte Rechnung muss in der jeweiligen Iteration dann der kleinste ermittelte Zeitschritt verwendet werden:

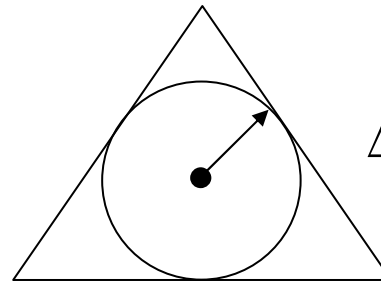
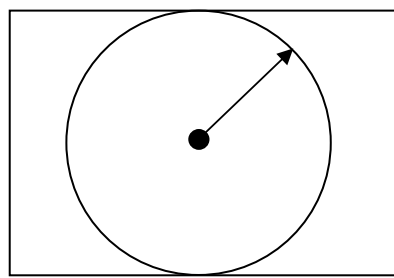
$$\Delta t^{global} = CFL \cdot \min \left(\frac{\Delta x_i}{|v_i^{max}| + c_i} \right)$$

Berechnet man jedoch ein stationäres Problem, so ist es möglich, in jeder Zelle den lokalen Zeitschritt zu verwenden, da für das auskonvergierte Problem die zeitliche Änderung des Zustands null ist. Für instationäre Probleme ist dies nicht möglich.



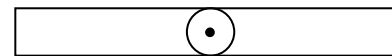
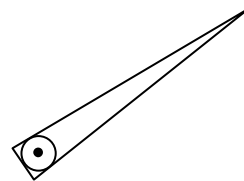
Zeitschritt in mehreren Raumdimensionen

In mehreren Raumdimensionen wird die Zeitschrittweitenbedingung restriktiver. Hier ist die charakteristische Länge z. B. der Innenkreisdurchmesser einer Zelle. Eine anschauliche Erklärung der Stabilität ist nicht mehr möglich.



$$\Delta t^{global} = CFL \cdot \min \left(\frac{2 \cdot r_i}{|v_i^{max}| + c_i} \right)$$

Vorsicht ist geboten bei stark verzerrten Zellen (Navier-Stokes). Hier wird der Innen-kreis sehr klein, was den globalen Zeitschritt einbrechen lässt.



Einfluss der Diskretisierung auf den Zeitschritt

Je nach Diskretisierung variiert der maximal mögliche Zeitschritt stark und nimmt mit einer steigenden Anzahl von Raumdimensionen ab, da hier auch noch mehrdimensionale Effekte hinzukommen.

Die maximal mögliche CFL-Zahl muss im numerischen Experiment ermittelt werden bzw. aus Tabellen entnommen werden.

