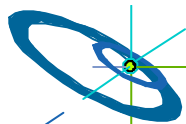


Das Godunov-Verfahren

C.-D. Munz, M. Atak, A. Stock

Universität Stuttgart
Institut für Aerodynamik und Gasdynamik (IAG)

www.iag.uni-stuttgart.de



CFDFV-Seminar

Munz, Atak, Stock
Universität Stuttgart

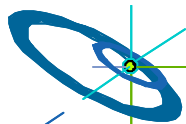
IAG

H L R I S



Die Berechnung des numerischen Flusses

1. Finite-Volumen-Verfahren für die Eulergleichungen
2. Das Stoßwellenrohr
3. Die Idee von Godunov



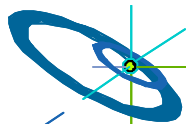
Euler-Gleichungen in einer Raumdimension

$$u_t + f(u)_x = 0$$

$$u = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ e \end{pmatrix} \quad f(u) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ v(e + p) \end{pmatrix}$$

Zustandsgleichung: $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon \Leftrightarrow p = (\gamma - 1)\left(e - \frac{1}{2}\rho v^2\right)$

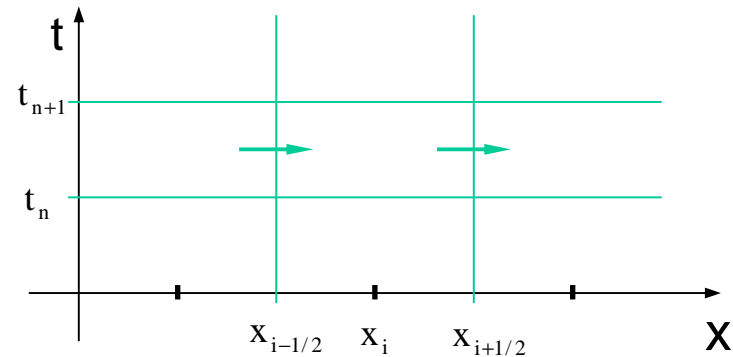
Gasdynamik



Finite-Volumen-Verfahren in einer Raumdimension

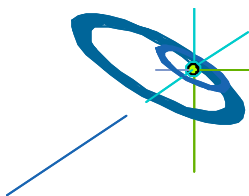
Erhaltungsgleichung:

$$u_t + f(u)_x = 0$$



Integration über $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [t_n, t_{n+1}]$:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u_t(x, t) dx dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(u(x, t))_x dx dt = 0$$



Finite-Volumen-Verfahren oder Verfahren in Erhaltungsform

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u_t(x, t) dx dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(u(x, t))_x dx dt = 0$$

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x, t_{n+1}) - u(x, t_n) dx + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(x_{i+1/2}, t)) - f(u(x_{i-1/2}, t)) dt = 0$$

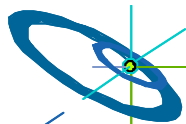
$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (g_{i+1/2}^n - g_{i-1/2}^n)$$

$$u_i^n \text{ approximiert } \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x, t_n) dx$$

Integraler Mittelwert

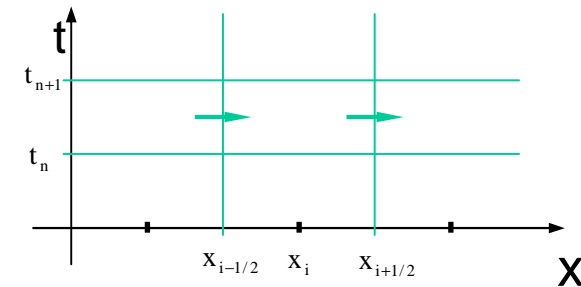
$$g_{i+1/2}^n \text{ approximiert } \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(x_{i+1/2}, t)) dt$$

numerischer Fluss



Einfachste Flußberechnung: Mittelwert

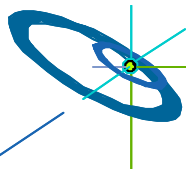
$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (g_{i+1/2}^n - g_{i-1/2}^n)$$



$$g_{i+1/2} \text{ approximiert } \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(x_{i+1/2}, t)) dt$$

Einfachste Form des Flusses:

$$g_{i+1/2} := \frac{1}{2} (f(u(x_i, t_n)) + f(u(x_{i+1}, t_n)))$$



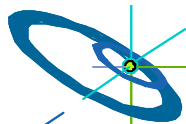
Einfachste Flußberechnung: Mittelwert

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (g_{i+1/2}^n - g_{i-1/2}^n)$$

$$g_{i+1/2} := \frac{1}{2} (f(u(x_i, t_n)) + f(u(x_{i+1}, t_n)))$$

Einsetzen: $\rightarrow u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (f(u(x_{i+1}, t_n)) - f(u(x_{i-1}, t_n)))$

Zentrale Differenz. Bedingungslos instabil, kann stabilisiert werden durch hinzufügen künstlicher Viskosität



Jameson-Verfahren

Zentrale Differenz + künstlicher Viskosität:

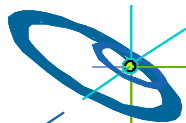
$$g_{i+\frac{1}{2}} = g(u_i, u_{i+1}) = \frac{1}{2} (f(u_i) + f(u_{i+1}))$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (g_{i+1/2}^n - g_{i-1/2}^n) + \varepsilon \Delta x^2 u_{xx} \quad \text{oder} \quad \varepsilon \Delta x^4 u_{xxxx}$$

Runge-Kutta Verfahren in der Zeit

=> Jameson Schema für transsonische Strömungen

Wahl der Dissipation sehr sophisticated

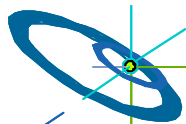


Godunov's Idee

Das Stoßwellenrohr (Shock tube)

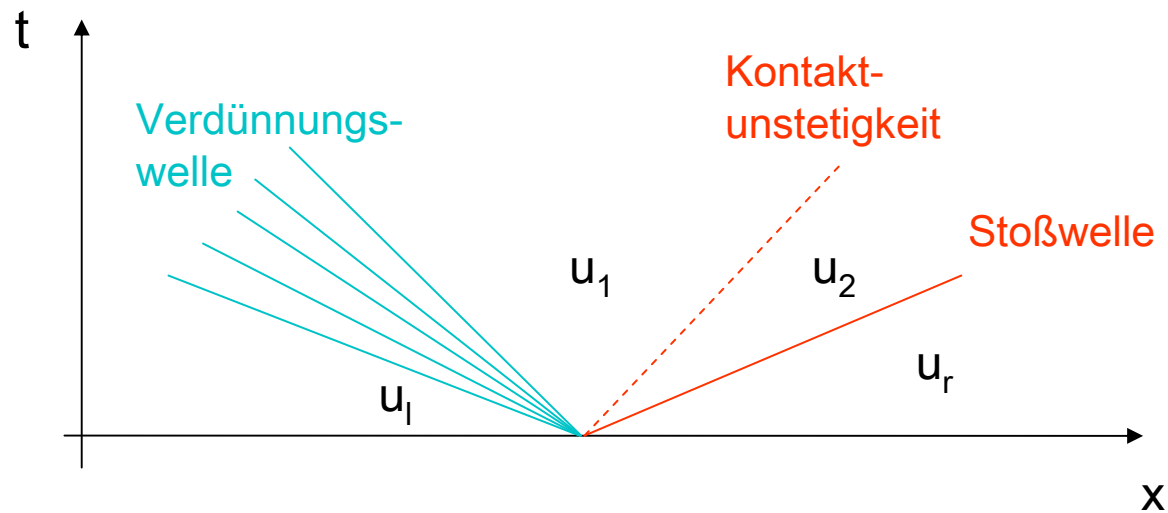
Konstanter Zustand u_l	Konstanter Zustand u_r
--------------------------	--------------------------

$$u(x, t = 0) = \begin{cases} u_l & \text{für } x < 0 \\ u_r & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

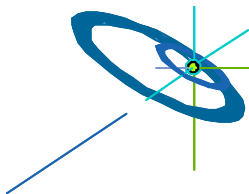


Riemann Problem für die Euler-Gleichungen

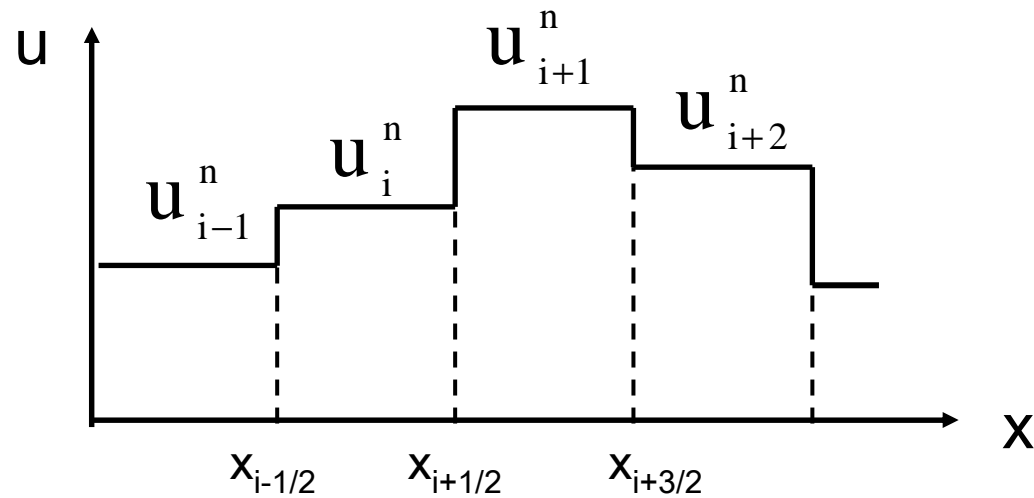
$$u_t + f(u)_x = 0 \quad \text{mit} \quad u(x,0) = \begin{cases} u_l & \text{für } x < 0 \\ u_r & \text{für } x > 0 \end{cases}$$



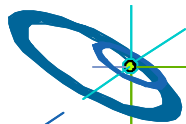
Exakte Lösung: Fixpunktproblem



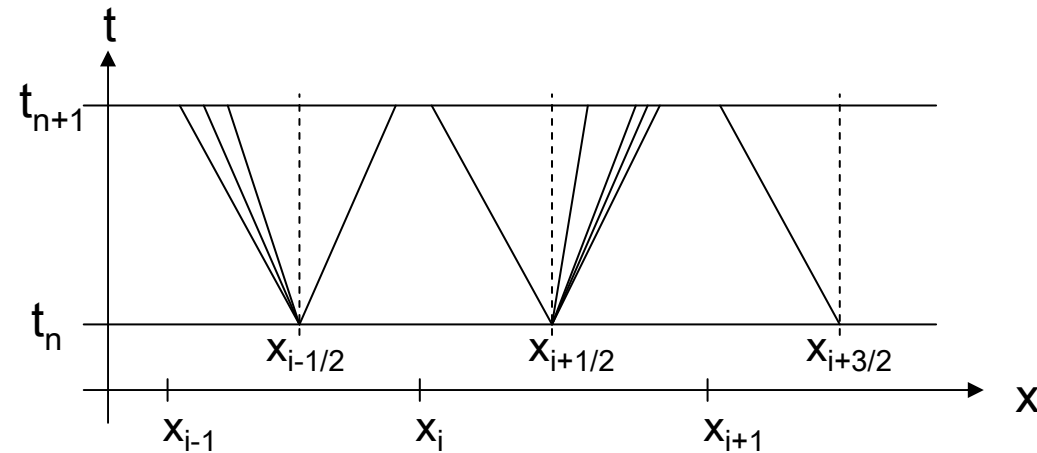
Godunov's Idee in einer Raumdimension



Stückweise konstante Werte in jeder Zelle
Löse Riemann-Problem an jeder Zellkante



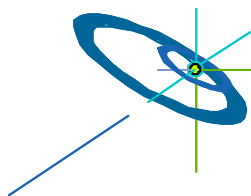
Formulierung als Finite Volumen Verfahren



$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (g_{i+1/2}^n - g_{i-1/2}^n) \quad \text{FV-scheme}$$

$g_{i+1/2}^n$ Numerischer Fluß bei $x_{i+1/2}$

$$g_{i+1/2}^n \text{ approximiert } \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(x_{i+1/2}, t)) dt$$



Die Methode von Godunov

Numerischer Fluß der Godunov-Methode:

$$g_{i+1/2}^n = f(u_{RP}(0; u_i, u_{i+1}))$$

u_{RP} : Lösung des Riemann-Problem an der Zellkante

Eigenschaften des Godunov-Verfahrens:

- Exakte Erhaltung
- Nichtlineare Wellenausbreitung
- Adaptivität

Stabilität: CFL-Bedingung

