

Finite-Volumen-Verfahren für die Navier-Stokes-Gleichungen

P. Birken¹, M. Haas²

Universität Kassel

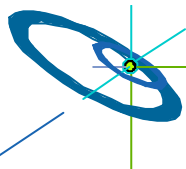
¹Fachbereich Mathematik

www.mathematik.uni-kassel.de

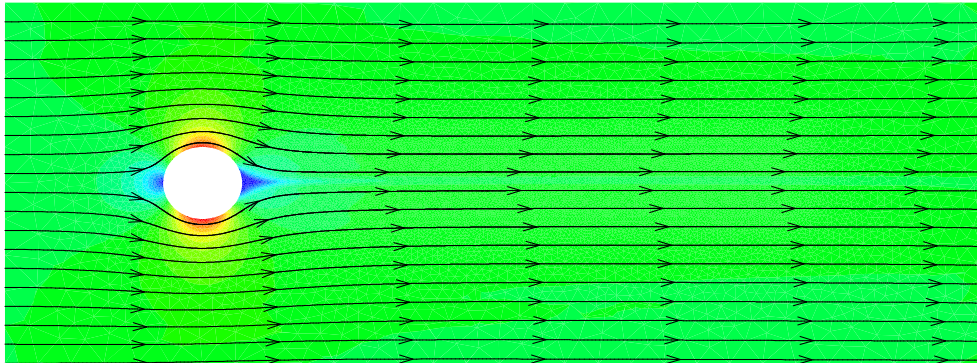
Universität Stuttgart

²Institut für Aerodynamik und Gasdynamik (IAG)

www.iag.uni-stuttgart.de

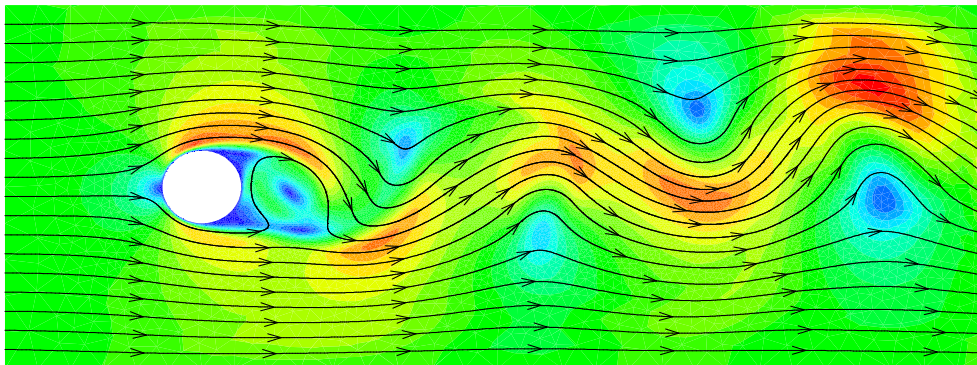


Reibungsfreie und reibungsbehaftete Strömungen



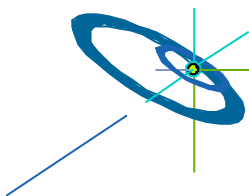
Eulergleichungen:

reibungsfreie
Zylinderumströmung



**Navier-Stokes-
Gleichungen:**

reibungsbehaftete
Zylinderumströmung



Die kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen

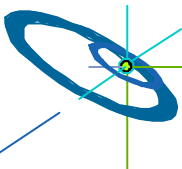
$$\begin{aligned}\rho_t + \nabla \cdot (\rho U) &= 0 \\ (\rho U)_t + \nabla \cdot ((\rho U) \circ U) + \nabla p &= \nabla \cdot \tau \\ e_t + \nabla \cdot (U(e + p)) &= \nabla \cdot (\tau U) - \nabla \cdot q\end{aligned}$$

$$\tau = 2\mu D - \frac{2}{3}\mu \nabla U \quad \text{mit} \quad D = \frac{1}{2}[\nabla U + (\nabla U)^T]$$

$$\mu = 1,46 \cdot 10^{-6} \left[1 + \frac{112 K}{T} \right]^{-1} \sqrt{T}$$

$$q = -k \nabla T, \quad k = \frac{(9\gamma - 5)c_p \mu}{4\gamma}$$

Das homogene System reduziert sich auf die Eulergleichungen



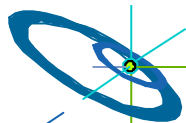
Die entdimensionalisierten Navier-Stokes-Gleichungen

Die Größen in den Gleichungen treten in extrem unterschiedlichen Skalen auf. Um numerische Auslöschungsfehler zu verhindern, werden die Gleichungen oft in der dimensionslosen Form verwendet:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_t + \nabla \cdot (\hat{\rho} \hat{U}) &= 0 \\ (\hat{\rho} \hat{U})_t + \nabla \cdot ((\hat{\rho} \hat{U}) \circ \hat{U}) + \nabla \hat{p} &= \frac{1}{\text{Re}_{ref}} \nabla \cdot \hat{\tau} \\ \hat{e}_t + \nabla \cdot (\hat{U} (\hat{e} + \hat{p})) &= \frac{1}{\text{Re}_{ref}} \nabla \cdot (\hat{\tau} \hat{U}) - \frac{\gamma}{(\gamma - 1) \text{Re}_{ref} \text{Pr}_{ref}} \nabla \cdot \hat{q} \end{aligned}$$

Die linke Seite enthält keine weiteren Kennzahlen, die Eulergleichungen sind also in dimensionsloser und dimensionsbehafteter Form identisch. Auf der rechten Seiten bei den Navier-Stokes-Gleichungen treten allerdings zusätzliche Größen auf, wie die Reynolds-Zahl Re und die Prandtl-Zahl Pr .

Auf den folgenden Folien wird das $\hat{}$ für die dimensionslosen Größen weg gelassen.



Flussformulierung

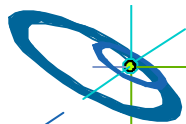
Die rechte Seite kann in Flussformulierung gebracht werden:

$$U_t + \nabla \cdot F^C = \nabla \cdot F^D$$

Die viskosen Flüsse lassen sich in zwei Raumdimensionen folgendermaßen formulieren:

$$F^D = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\text{Re}_{ref}} \left(\frac{4}{3} \mu (v_1)_x - \frac{2}{3} \mu (v_2)_y \right) \\ \frac{1}{\text{Re}_{ref}} \mu \left((v_1)_y + (v_2)_x \right) \\ \frac{1}{\text{Re}_{ref}} (v_1) \left(\frac{4}{3} \mu (v_1)_x - \frac{2}{3} \mu v_y \right) + \frac{1}{\text{Re}_{ref}} (v_2) \mu \left((v_1)_y + (v_2)_x \right) - \frac{\gamma}{(\gamma-1)\text{Re}_{ref} \text{Pr}_{ref}} q_1 \end{pmatrix}$$

$$G^D = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\text{Re}_{ref}} \mu \left((v_1)_y + (v_2)_x \right) \\ \frac{1}{\text{Re}_{ref}} \left(\frac{4}{3} \mu (v_2)_y - \frac{2}{3} \mu (v_1)_x \right) \\ \frac{1}{\text{Re}_{ref}} (v_1) \mu \left((v_1)_y + (v_2)_x \right) + \frac{1}{\text{Re}_{ref}} (v_2) \left(\frac{4}{3} \mu (v_2)_y - \frac{2}{3} \mu (v_1)_x \right) - \frac{\gamma}{(\gamma-1)\text{Re}_{ref} \text{Pr}_{ref}} q_2 \end{pmatrix}$$



Flussberechnung

Wie auch bei den konvektiven Flüssen ist es bei den viskosen Flüssen nötig, die Werte auf der entsprechenden Zellkante zu bestimmen, um den Fluss über diese Kante bestimmen zu können.

Die benötigten Werte sind (in 2D):

Geschwindigkeiten:

$$v_1, v_2$$

Ableitungen der Geschwindigkeiten:

$$v_{1x}, v_{1y}, v_{2x}, v_{2y}$$

Ableitung der Temperatur:

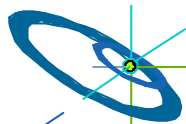
$$T_x, T_y$$

Dynamische Viskosität:

$$\mu$$

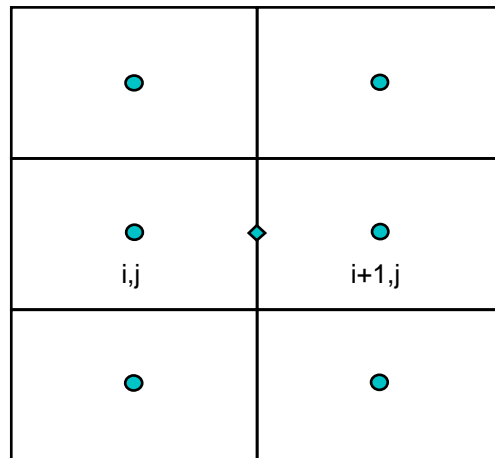
Wärmeleitfähigkeit:

$$k$$



Flussberechnung auf strukturierten Gittern

Der parabolische Charakter ermöglicht es, den Zustand auf der Zellkante als arithmetisches Mittel der Zustände in den angrenzenden Zellen zu bestimmen:

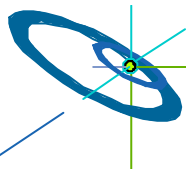


$$(v_1)_{i+1/2,j} = \frac{(v_1)_{i+1,j} + (v_1)_{i,j}}{2}$$

$$(v_2)_{i+1/2,j} = \frac{(v_2)_{i+1,j} + (v_2)_{i,j}}{2}$$

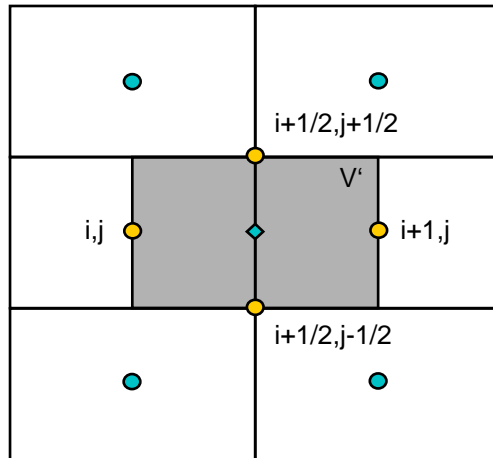
$$(\mu)_{i+1/2,j} = \frac{(\mu)_{i+1,j} + (\mu)_{i,j}}{2}$$

$$(k)_{i+1/2,j} = \frac{(k)_{i+1,j} + (k)_{i,j}}{2}$$



Flussberechnung auf strukturierten Gittern: Ableitungen

Eine arithmetische Mittelung der Gradienten der beiden benachbarten Zellen würde zu einer Entkopplung der Zellen führen. Die Ableitungen müssen daher anders bestimmt werden, nämlich über den Satz von Green:



Vorgehen:

- Erstellen eines gedachten Kontrollvolumens V'
- Berechnung der Werte auf den Seitenmitten von V' :

$u_{i,j}$ und $u_{i+1,j}$: trivial

$$u_{i+1/2, j+1/2} = \frac{1}{4} (u_{i,j} + u_{i,j+1} + u_{i+1,j} + u_{i+1,j+1})$$

$$u_{i+1/2, j-1/2} = \frac{1}{4} (u_{i,j} + u_{i,j-1} + u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1})$$

- Berechnung der Ableitungen:

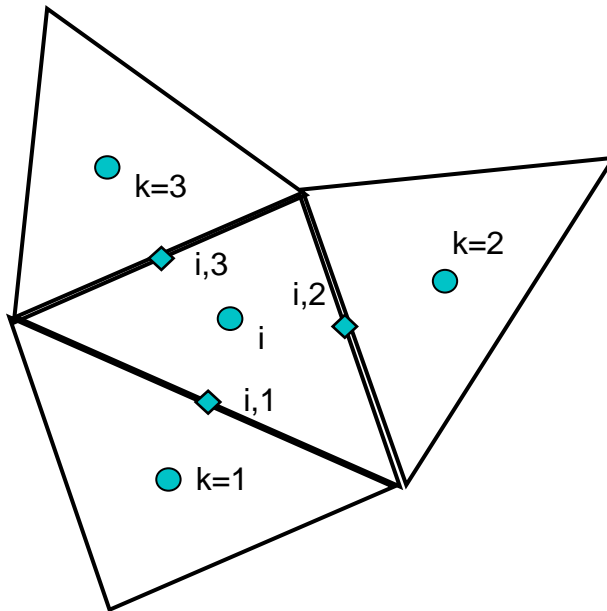
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{V'} \oint_{\partial V'} u \, dS'_x \approx \frac{1}{V'} \sum_{m=1}^{\text{Anz. Kanten}} u_m S'_{x,m},$$

$$\text{z.B.: } \frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{1}{\Delta x \Delta y} ((v_1)_{i+1,j} - (v_1)_{i,j}) \Delta y, \text{ oder: } \frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{1}{\Delta x \Delta y} ((v_1)_{i+1/2, j+1/2} - (v_1)_{i+1/2, j-1/2}) \Delta x$$



Flussberechnung auf unstrukturierten Gittern

Auf unstrukturierten Gittern werden auch alle nicht abgeleiteten Größen durch Mittelung der beiden Nachbarzellen bestimmt:

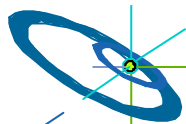


$$(v_1)_{i,k} = \frac{(v_1)_i + (v_1)_k}{2}$$

$$(v_2)_{i,k} = \frac{(v_2)_i + (v_2)_k}{2}$$

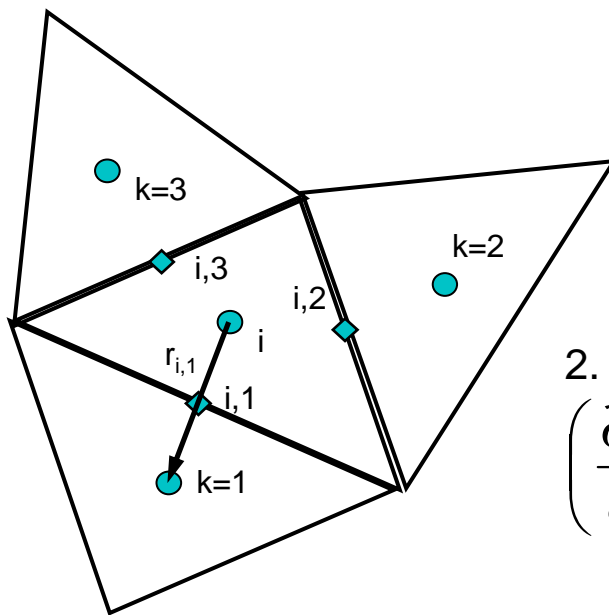
$$(\mu)_{i,k} = \frac{(\mu)_i + (\mu)_k}{2}$$

$$(k)_{i,k} = \frac{(k)_i + (k)_k}{2}$$



Flussberechnung auf unstrukturierten Gittern: Ableitungen

Wie auch schon bei den strukturierten Gittern würde eine Mittelung der Gradienten der beiden Zellen zu einer Entkoppelung führen. Da aber das Vorgehen wie auf strukturierten Gittern hier zu ineffizient wäre, verwendet man hier einen empirischen Ansatz, der die Kopplung wieder herstellt:



$$\nabla u_i \approx \frac{1}{V} \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} (u_i + u_k) \vec{n}_{i,k} L_k$$

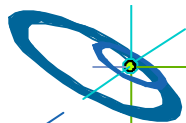
1. Schritt: gemittelter Gradient

$$\left(\overline{\nabla u} \right)_{i,k} = \frac{1}{2} (\nabla u_i + \nabla u_k)$$

2. Schritt: Korrektur mittels der Richtungsableitung

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l} \right)_{i,k} = \frac{u_k - u_i}{l_{i,k}}; \quad \vec{t}_{i,k} = \frac{\vec{r}_{i,k}}{l_{i,k}}$$

$$\nabla u_{i,k} = \left(\overline{\nabla u} \right)_{i,k} - \left[\left(\overline{\nabla u} \right)_{i,k} \cdot \vec{t}_{i,k} - \left(\frac{\partial u}{\partial l} \right)_{i,k} \right] \vec{t}_{i,k}$$



Zeitschritt

Die Reibungsanteile der Navier-Stokes-Gleichungen haben mathematisch gesehen einen parabolischen Charakter, was die numerische Stabilität stark beeinflusst. Die Stabilitätsbedingung eines expliziten Verfahrens für parabolische PDGL ist viel restriktiver als für hyperbolische PDGL:

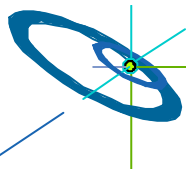
CFL - Bedingung :

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\max(|u| + |c|)}$$

DFL - Bedingung :

$$\Delta t \leq \frac{\min(\rho)\Delta x^2}{2\mu}$$

Dies kann zu sehr ineffizienten Verfahren führen, nämlich dann, wenn die betrachtete Physik auf einer viel langsameren Zeitskala abläuft.



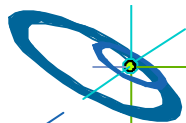
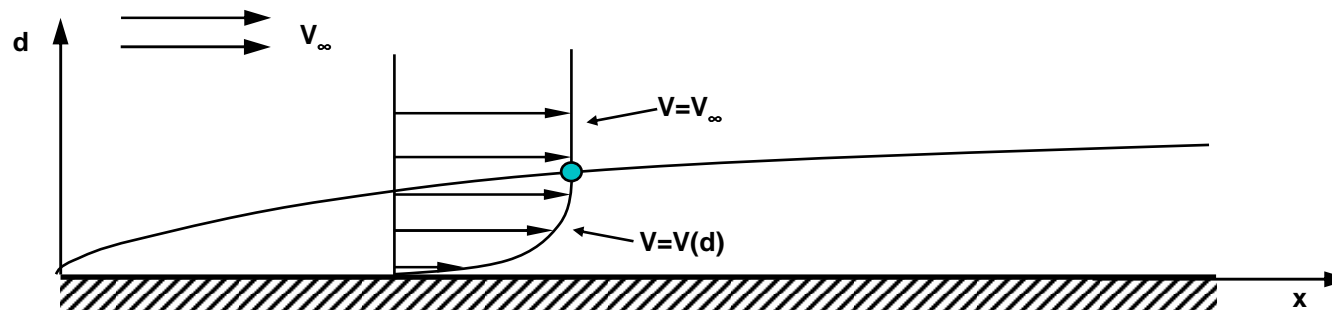
Reibungsbehaftete Wände: Die Grenzschicht

An der reibungsbehafteten (d.h. physikalisch realisierbaren) Wand gilt immer die sog. Haftbedingung:

Das Fluid haftet immer an der Wand an.

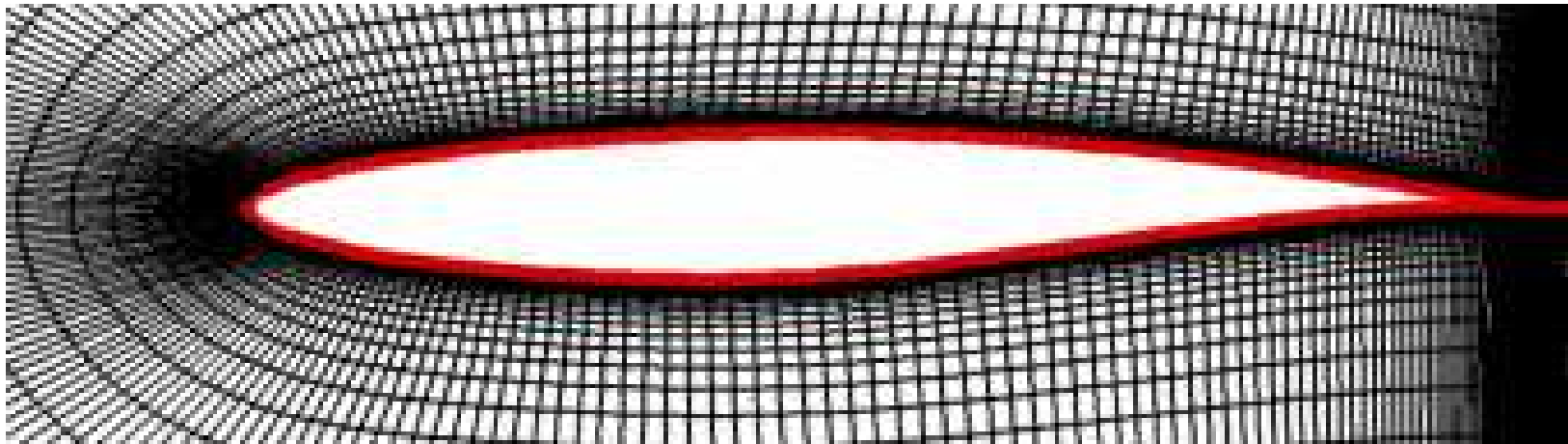
Dies hat große Konsequenzen für Strömungen, da unabhängig von der Strömungsgeschwindigkeit in der Außenströmung an Wänden immer die Haftbedingung erfüllt sein muss.

→ An der Wand stellt sich eine Zone ein, in der sich die Zustandsgrößen rapide ändern, die sog. Grenzschicht.

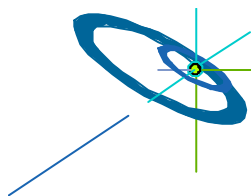


Rechengitter in der Grenzschicht

Da auf kleinstem Raum eine extreme Zustandsänderung statt findet, müssen die Zellen in diesem Gebiet extrem fein gewählt werden, um das Phänomen auflösen zu können:



Diese extrem kleinen Zellen wirken sich in der DFL-Bedingung, in die die Zellgröße quadratisch eingeht drastisch auf den Zeitschritt aus.



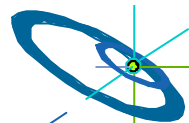
Wahl der Zeitdiskretisierung

Implizites Verfahren:

- Meist beliebig große Zeitschritte möglich
- starke numerische Diffusion bei großen Zeitschritten
→ „Verwischen der Lösung“
- Phänomene, die sich schnell ausbreiten, oder sich mit hoher Frequenz ändern können nur schlecht bis gar nicht erfasst werden
→ **Für stationäre und viele instationäre Probleme geeignet**

Explizites Verfahren

- bedingt stabil im Rahmen der CFL/DFL-Bedingung
- Physikalische Phänomene, deren Zeitskala mit der von der CFL-Bedingung diktierten übereinstimmen, werden gut aufgelöst
→ **Für manche instationäre Probleme geeignet**
→ **In der Praxis für DNS einzige Möglichkeit (Aufwand, Speicher)**



BDF-Verfahren

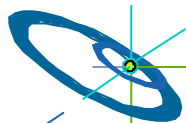
Instationäre Probleme sind im industriellen Kontext durch die bisher gezeigten expliziten Verfahren nicht effizient behandelbar. Notwendig sind schnelle implizite Verfahren hoher Ordnung. Ein Beispiel sind die sehr stabilen BDF-Verfahren. Das Verfahren 2. Ordnung ist A-stabil und lautet wie folgt:

$$\frac{3u^{n+1} - 4u^n + u^{n-1}}{2\Delta t} = -R(u^{n+1})$$

Problem ist, dass u^{n+1} nicht bekannt ist, in jedem Schritt muss also ein nichtlineares Gleichungssystem gelöst werden. Wir stellen die Gleichung zunächst folgendermaßen um:

$$\frac{3}{2\Delta t}u^{n+1} - \frac{2}{\Delta t}u^n + \frac{1}{2\Delta t}u^{n-1} + R(u^{n+1}) = 0$$

Hier gibt es zwei Alternativen: Newton und Dual-Time-Stepping.



Newton-Verfahren

Zu Lösen ist:

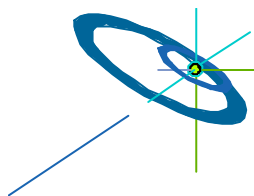
$$\frac{3}{2\Delta t}u - \frac{2}{\Delta t}u^n + \frac{1}{2\Delta t}u^{n-1} + R(u) =: F(u) = 0$$

Das Newton-Verfahren zur Bestimmung der Nullstelle lautet dann:

$$\frac{\partial F}{\partial u} \Big|_{u^{(k)}} \Delta u^{(k)} = -F(u^{(k)}) \quad \text{mit} \quad u^{(k+1)} = u^{(k)} + \Delta u^{(k)}$$

Die Matrix des linearen Gleichungssystems ist gegeben durch

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{3}{2\Delta t}I + \frac{\partial R}{\partial u}$$



Dual-Time-Stepping

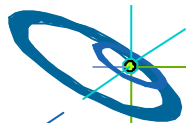
Für stationäre Probleme existieren zahlreiche Beschleunigungstechniken, die auf den instationären Fall übertragen werden können. Zentral ist dabei die Nutzung von Mehrgitterverfahren! Betrachten wir wieder

$$\frac{3}{2\Delta t}u - \frac{2}{\Delta t}u^n + \frac{1}{2\Delta t}u^{n-1} + R(u) = F(u) = 0$$

Nun wird die Pseudo-Zeit t^* eingeführt und das stationäre Problem in dieser Zeit betrachtet

$$\frac{\partial}{\partial t^*}(u) = F(u)$$

Im stationären Zustand verschwindet die Zeitableitung und wir erhalten die Nullstelle von $F(u)$. Die Lösung $u^* = u^{n+1}$ ist dann die neue numerische Lösung zum neuen Zeitschritt.



Explizite Lösung des Dual-Timestepping-Schemas

Die Berechnung des stationären Zustands kann z.B. über ein Low-Storage Runge-Kutta-Verfahren mit m Stufen erfolgen. Dieses agiert als Glätter in einem Mehrgitterverfahren.

$$u^{(0)} = u^{*,\nu}$$

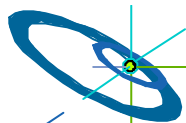
$$u^{(1)} = u^{(0)} - \frac{\alpha_1 \Delta t^*}{V} F(u^{(0)})$$

$$u^{(2)} = u^{(1)} - \frac{\alpha_2 \Delta t^*}{V} F(u^{(1)})$$

\vdots

$$u^{*,\nu+1} = u^{(m-1)} - \frac{\alpha_m \Delta t^*}{V} F(u^{(m-1)})$$

Auf groben Gittern sind riesige Zeitschritte möglich, was Störungen schnell aus dem Rechengebiet heraustransportiert und schnelle Konvergenz ermöglicht.

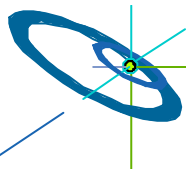


Weitere Beschleunigungstechniken

Die Koeffizienten der Runge-Kutta-Verfahren werden so gewählt, dass sich ein grosses Stabilitätsgebiet ergibt. Ferner werden für die konvektiven und die diffusiven Terme unterschiedliche Verfahren benutzt, wobei das letztere Verfahren die rechenaufwändigen diffusiven Terme selten auswertet.

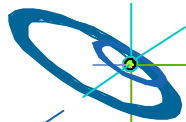
Die konkreten Koeffizienten hängen noch von der Flussfunktion ab.

Bei Nutzung eines W-Zyklus auf vier Gittern sind bei einfach viskosen Problemen 30-50 Iterationen ausreichend, bei stationären Euler-Gleichungen nur 3-5.



Zusammenfassung Dual-Timestepping

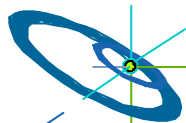
- Das Verfahren ist für instationäre Strömungen geeignet, deren relevante Phänomene sich auf deutlich größeren Zeitskalen als die Zeitschritte aus der CFL- oder DFL-Bedingung abspielen
- Die tatsächlich wählbaren physikalischen Zeitschritte sind problemabhängig
- Die Pseudozeitschrittgleichung wird in der Regel nicht bis zum völligen Auskonvergieren berechnet (≤ 100 Iterationen)
- Zentraler Vorteil: Alle Methoden zur Konvergenzbeschleunigung (lokale Zeitschritte, Residuenglättung, Mehrgitterverfahren,...), die nur für stationäre Probleme geeignet sind, können nun auch für instationäre Probleme verwendet werden.



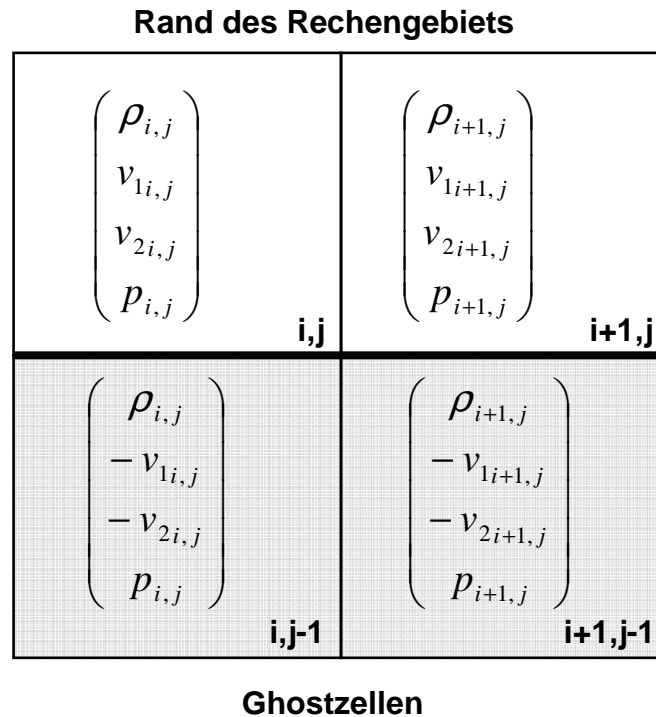
Randbedingungen

Die Randbedingungen sind mit Ausnahme der Wand für die Navier-Stokes-Gleichungen identisch mit denen der Eulergleichungen.

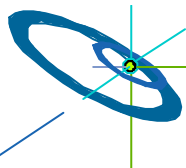
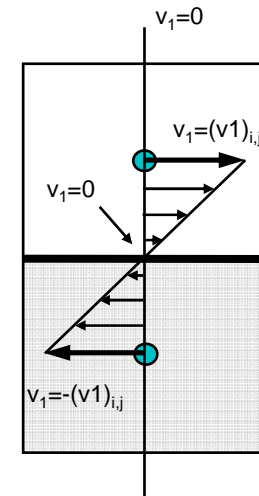
An der Wand bildet sich bei den Navier-Stokes-Gleichungen jedoch eine sog. Grenzschicht aus, was entscheidende Veränderungen zur Folge hat.



Randbedingung für die reibungsbehaftete, adiabate Wand



Für die Wand gilt:
In Normalen- und in
Tangentialrichtung muss die
Geschwindigkeit null sein.

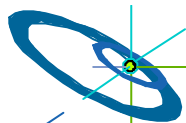
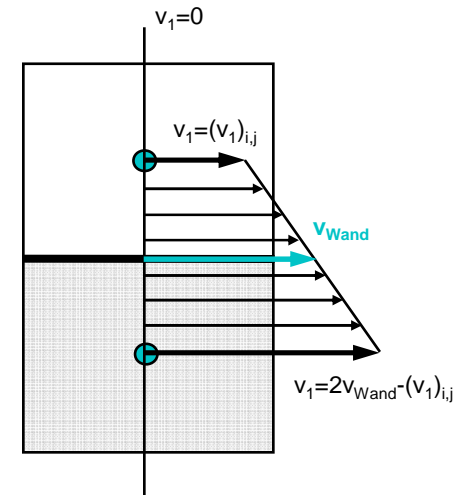


Reibungsbehaftete, adiabate bewegte Wand

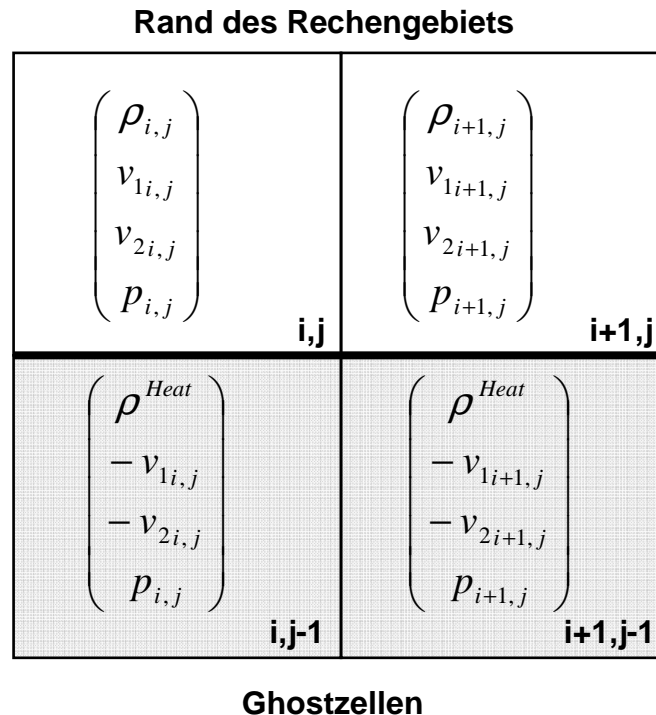
Rand des Rechengebiets

$\begin{pmatrix} \rho_{i,j} \\ v_{1i,j} \\ v_{2i,j} \\ p_{i,j} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \rho_{i+1,j} \\ v_{1i+1,j} \\ v_{2i+1,j} \\ p_{i+1,j} \end{pmatrix}$
i,j	i+1,j
$\begin{pmatrix} \rho_{i,j} \\ 2v_{Wand} - v_{1i,j} \\ -v_{2i,j} \\ p_{i,j} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \rho_{i+1,j} \\ 2v_{Wand} - v_{1i+1,j} \\ -v_{2i+1,j} \\ p_{i+1,j} \end{pmatrix}$
i,j-1	i+1,j-1

Ghostzellen



Reibungsbehaftete beheizte Wand



Druck und Geschwindigkeiten werden wie bei der adiabaten Wand behandelt. Die Dichte wird gemäß der vorgeschriebenen Wandtemperatur aus der Zustandsgleichung ermittelt:

$$\rho^{Heat} = \frac{p_{i,j}}{RT_{Wand}}$$

