Finite Volumen Verfahren 2. Ordnung
Zeitdiskretisierung

K. Benkert[1], A. Stock[2]

[1]High Performance Computing Centre Stuttgart

www.hlrs.de

Universität Stuttgart

[2]Institut für Aerodynamik und Gasdynamik (IAG)

www.iag.uni-stuttgart.de

Verfahren zweiter Ordnung in der Zeit

Prinzipiell sind zwei verschiedene Ansätze möglich:

1. Getrennte Diskretisierung von Zeit und Raum:
   „Method of Lines“

2. Raum-Zeit-Diskretisierung:
   „Space-Time-Expansion“

Method of Lines - Grundidee

Die Idee hier ist es, die Zeitdiskretisierung völlig von der Raumdiskretisierung zu trennen:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} u(x,t)\, dV + \int_V \nabla \cdot f\left(u(x,t)\right) dV = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \overline{u}(t)}{\partial t} = -\frac{1}{V} \oint_{\partial V} f\left(u(x,t)\right) \cdot \vec{n}\; dV$$

Definiert man nun für den Raumoperator

$$-\frac{1}{V} \oint_{\partial V} f\left(u(x,t)\right) \cdot \vec{n}\; dV = R$$

Erhält man für den Zeitoperator die gewöhnlich Differenzialgleichung

$$\frac{\partial \overline{u}(t)}{\partial t} = R$$

Method of Lines – Numerische Umsetzung

1. Berechnung des Raumoperators R mit einem beliebigen Verfahren

$$R = L(u, t)$$

2. Lösen der gewöhnlichen Differenzialgleichung für die zeitliche Änderung mit Verfahren zum Lösen von Anfangswertproblemen, beliebt sind explizite Runge-Kutta-Verfahren oder (implizite) BDF-Verfahren.

Space-Time-Expansion

Zu lösen war folgendes Problem:

$$\int_V \int_{t^n}^{t^{n+1}} \frac{\partial}{\partial t} u(x,t)\,dt\,dV + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_V \nabla \cdot f\left(u(x,t)\right) dV dt = 0$$

$$\Rightarrow u_i^{n+1} = u_i^{n+1} - \frac{1}{V} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \sum_{m=1}^{N} g\left(u_L^{(m)}(t), u_R^{(m)}(t)\right) \vec{n}\; A_m \; dt$$

Beim Verfahren erster Ordnung wurde für das Zeitintegral die Rechteckregel angesetzt, die bekanntlich erster Ordnung genau ist. Ein Integrationsverfahren zweiter Ordnung ist z.B. die Mittelpunktsregel:

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \sum_{m=1}^{N} g\left(u_L^{(m)}(t), u_R^{(m)}(t)\right) \vec{n}\; A_m \; dt = \Delta t \sum_{m=1}^{N} g\left(u_L^{(m)}\left(t^{n+1/2}\right), u_R^{(m)}\left(t^{n+1/2}\right)\right) \vec{n}\; A_m$$

Problem: $u_{L,R}^{(m)}\left(t^{n+1/2}\right)$ sind nicht bekannt.

Space-Time-Expansion: Cauchy-Kovalevskaya-Prozedur

Die unbekannten Werte $u_{L,R}^{(m)}\left(t^{n+1/2}\right)$ müssen also rekonstruiert werden, um das Zeitintegral genauer lösen zu können. Zunächst werden sie als Taylorentwicklung um den bekannten Zustand $u_{L,R}^{(m)}\left(t^{n}\right)$ ausgedrückt:

$$u\left(t^{n+1/2}\right)=u\left(t^{n}\right)+\frac{\Delta t}{2}u_t\left(t^{n}\right)+O\left(\Delta t^2\right)$$

Zur Bestimmung der Unbekannten muss also die Zeitableitung bestimmt werden. Da wir den Zustand nur innerhalb der Zelle betrachten und dort voraussetzen können, dass der Verlauf stetig ist, betrachten wir nun wieder die Differenzialgleichung:

$$u_t+\nabla\cdot f\left(u\right)=0$$

Die Cauchy-Kovalevskaya-Prozedur besteht nun darin, diese DGL nach der Zeitableitung umzustellen:

$$u_t=-\nabla\cdot f\left(u\right)$$

Space-Time-Expansion: Vollständiges Schema

Die vollständige Idee der Space-Time-Expansion ist es nun, die Taylorentwicklung in Zeit und Raum auszuführen:

$$
\begin{aligned}
u\left(x, y, z, t^{n+1/2}\right) \quad = \quad & u\left(x_0, y_0, z_0, t^n\right) + \\
& \Delta x \, u_x\left(x_0, y_0, z_0, t^n\right) + \\
& \Delta y \, u_y\left(x_0, y_0, z_0, t^n\right) + \\
& \Delta z \, u_z\left(x_0, y_0, z_0, t^n\right) + \\
& \frac{\Delta t}{2} u_t\left(x_0, y_0, z_0, t^n\right) + \\
& O\left(\Delta x^2, \Delta y^2, \Delta t^2\right)
\end{aligned}
$$

Die Raumableitungen werden durch die Rekonstruktion ermittelt, während die Zeitableitung durch die Cauchy-Kovalevskaya-Prozedur bestimmt wird. Auf diese Art und Weise ist es möglich, den Zustand an jeder Stelle eines Raum-Zeit-Elements zu bestimmen. Diese Zustände werden für die Flussberechnung verwendet.

Space-Time-Expansion: Zusammenfassung

Zu lösen war folgendes Problem:

$$u_i^{n+1} = u_i^{n+1} - \frac{1}{V} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \sum_{m=1}^{N} g\left(u_L^{(m)}(t), u_R^{(m)}(t)\right) \vec{n}\; L_m \; dt$$

Numerische Lösung des Zeitintegrals mit der Mittelpunktsregel:

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \sum_{m=1}^{N} g\left(u_L^{(m)}(t), u_R^{(m)}(t)\right) \vec{n}\; A_m \; dt = \Delta t \sum_{m=1}^{N} g\left(u_L^{(m)}\left(t^{n+1/2}\right), u_R^{(m)}\left(t^{n+1/2}\right)\right) \vec{n}\; A_m$$

Ermittlung der Zustände $u_{L,R}^{(m)}\left(t^{n+1/2}\right)$ mittels der Space-Time-Expansion.

Vergleich der Verfahrensabläufe Method of Lines / STE

Method of Lines mit RK O2

- Bestimmung Des Zeitschritts
- Randbedingungen
- Rekonstruktion
- Randbedingungen
- Flussberechnung
- Flussbilanzierung für RK-Zwischenlevel
- Randbedingungen
- Rekonstruktion
- Randbedingungen
- Flussberechnung
- Flussbilanzierung für RK-Zwischenlevel
- Zeitupdate auf das nächste Zeitlevel

STE 2. Ordnung

- Bestimmung Des Zeitschritts
- Randbedingungen
- Rekonstruktion (nur Gradienten)
- Cauchy-Kovalevskaya-Prozedur
- Space-Time-Expansion
- Randbedingungen
- Flussberechnung
- Flussbilanzierung und damit Zeitupdate auf das nächste Zeitlevel

Vergleich der Verfahren

Method of Lines

- Rekonstruktion und Flussberechnung müssen mehrfach ausgeführt werden
- Je nach Zeitdiskretisierung numerisch stabil, d.h. große Zeitschritte möglich (z. B. RK)
- Für alle Gleichungen (Typ, Dimensionen) identisch
- Sehr einfach zu programmieren
- Zeitordnung von Raumordnung unabhängig, sofern numerische Stabilität gewährleistet ist.

Space-Time-Expansion

- Rekonstruktion und Flussberechnung müssen nur einmal ausgeführt werden
- Numerisch nicht so stabil wie z.B. RK-Verfahren, d.h. kleinere Zeitschritte
- Eigene CK-Prozedur für alle Gleichungen (Typ, Dimensionen)
- CK-Prozedur i. d. R. sehr kompliziert zu programmieren
- Zeitordnung von Raumordnung abhängig