Zeitdiskretisierung

K. Benkert[1], A. Stock[2]

[1]High Performance Computing Centre Stuttgart

www.hlrs.de

Universität Stuttgart

[2]Institut für Aerodynamik und Gasdynamik (IAG)

www.iag.uni-stuttgart.de

Grundidee Finite-Volumen-Verfahren (I)

Die Differenzialgleichung

$$u_t + \nabla \cdot f(u) = 0$$

stellt Anforderungen an Differenzierbarkeit, die häufig nicht erfüllt sind. Dies gilt nicht für die integrale Form der Erhaltungsgleichung, hier für V_i:

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{V_i} u_t \, dV \, dt + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{V_i} \nabla \cdot f(u) \, dV \, dt = 0$$

Durch die Anwendung des Gaußschen Satzes erhält man:

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{V_i} u_t \, dV \, dt + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \oint_{\partial V_i} f(u) \cdot \vec{n} \, dS \, dt = 0$$

Grundidee Finite-Volumen-Verfahren (II)

Ein wesentlicher Schritt zu einem numerischen Verfahren ist nun, Mittelwerte über Volumina V zu betrachten. Dann ist

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{V_i} u_t \, dV \, dt = V_i \int_{t^n}^{t^{n+1}} (u_i)_t \, dt$$

und man erhält:

$$V_i \int_{t^n}^{t^{n+1}} (u_i)_t \, dt + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \oint_{\partial V_i} f(u) \, \vec{n} \, dS \, dt = 0$$

Wir definieren nun

$$R = -\frac{1}{V} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \oint_{\partial V} f(u) \, \vec{n} \, dS \, dt$$

Grundidee Finite-Volumen-Verfahren (III)

Bei *R* handelt es sich um das sog. Residuum, also die Änderung des integralen Mittelwerts eines Kontrollvolumens über eine Zeitspanne Δt.

$$R = \int_{t^n}^{t^{n+1}} (u_i)_t \, dt = u_i^{n+1} - u_i^n$$

Ziel des Finite-Volumen-Verfahrens ist es nun, in jedem Zeitschritt das Residuum zu bestimmen. Hierzu muss also folgender Ausdruck numerisch berechnet werden:

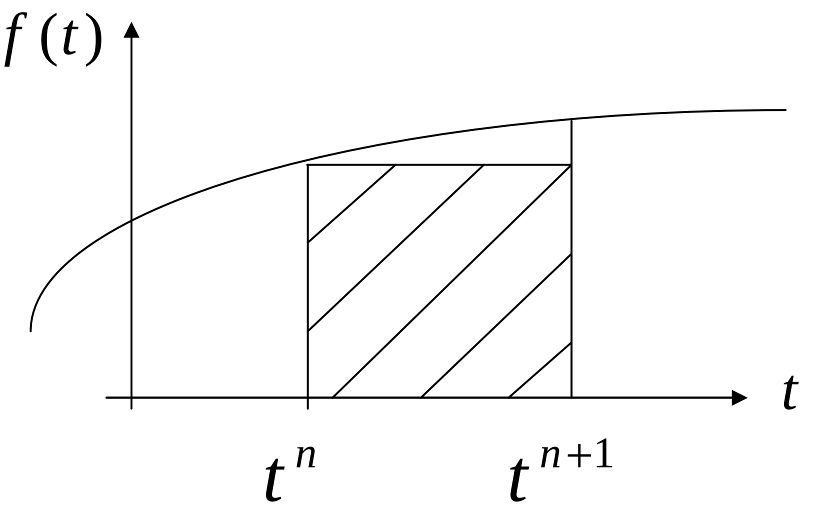
$$R = -\frac{1}{V} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \oint_{\partial V} f(u) \, \vec{n} \, dS \, dt$$

Zeitdiskretisierung zweiter Ordnung - Die Rechteckregel

Zur Berechnung des Residuums bleibt nun noch das Zeitintegral übrig. Als Ansatz erster Ordnung bietet es sich an, das Integral mit der **Rechteckregel** zu lösen:

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t) \approx \left(t^{n+1} - t^n\right) f(t^n)$$

Nur 1.O genau. Reicht jedoch aus, da Raumdiskretisierung auch nur 1.O genau ist.



$$f(t) = u(t)$$

Das numerische Verfahren

Das numerische Verfahren ergibt sich dann einfach zu:

$$\boxed{\Rightarrow R_i^n = -\frac{1}{V_i} \sum_{e_{ij} \subset \partial V_i} |e_{ij}| T^{-1} g(Tu_i^n, Tu_j^n; (1,0)^T)}$$

Und insgesamt:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + R_i^n = u_i^n - \frac{\Delta t}{V_i} \sum_{e_{ij} \subset \partial V_i} |e_{ij}| T^{-1} g(Tu_i^n, Tu_j^n; (1,0)^T)$$

Konkrete Implementierung auf unstrukturiertem Gitter

Schleife über alle Elemente:

```
Do iElem = 1, MESH%nElemes
   aElem => MESH%Elems(iElem)
```

Aufsummation der Flüsse:

```
Update = 0.
aSide => aElem%firstSide
DO WHILE(Associated(aSide))
   update = update + aSide%flux
   aSide => aSide%nectElemSide
   …
```

$$\sum_{e_{ij} \subset \partial V_i} |e_{ij}| T^{-1} g(Tu_i^n, Tu_j^n; (1,0)^T)$$

Zeitintegration mit Rechteckregel:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{V_i} \sum_{e_{ij} \subset \partial V_i} |e_{ij}| T^{-1} g(Tu_i^n, Tu_j^n; (1,0)^T)$$

```
aElem%Cvar(:) = aElem%Cvar(:) - eElem%Area_q * aElem%dt * update(:)
```

Wobei Area_q = $\frac{1}{V_i}$

Zeitdiskretisierung zweiter Ordnung

Prinzipiell sind zwei verschiedene Ansätze möglich:

1. Getrennte Diskretisierung von Zeit und Raum:
   „Method of Lines“

2. Raum-Zeit-Diskretisierung:
   „Space-Time-Expansion“