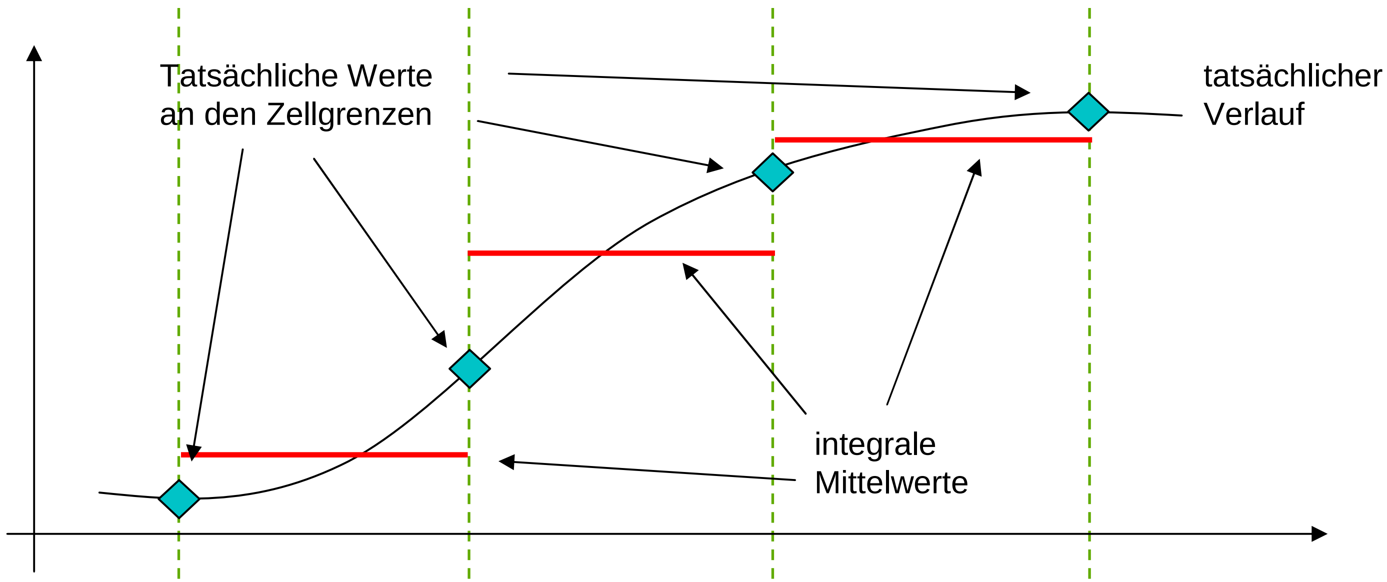
Finite Volumen Verfahren 2. Ordnung
Limiter und Rekonstruktion

K. Benkert[1], A. Stock[2]

[1]High Performance Computing Centre Stuttgart
www.hlrs.de

Universität Stuttgart
[2]Institut für Aerodynamik und Gasdynamik (IAG)
www.iag.uni-stuttgart.de

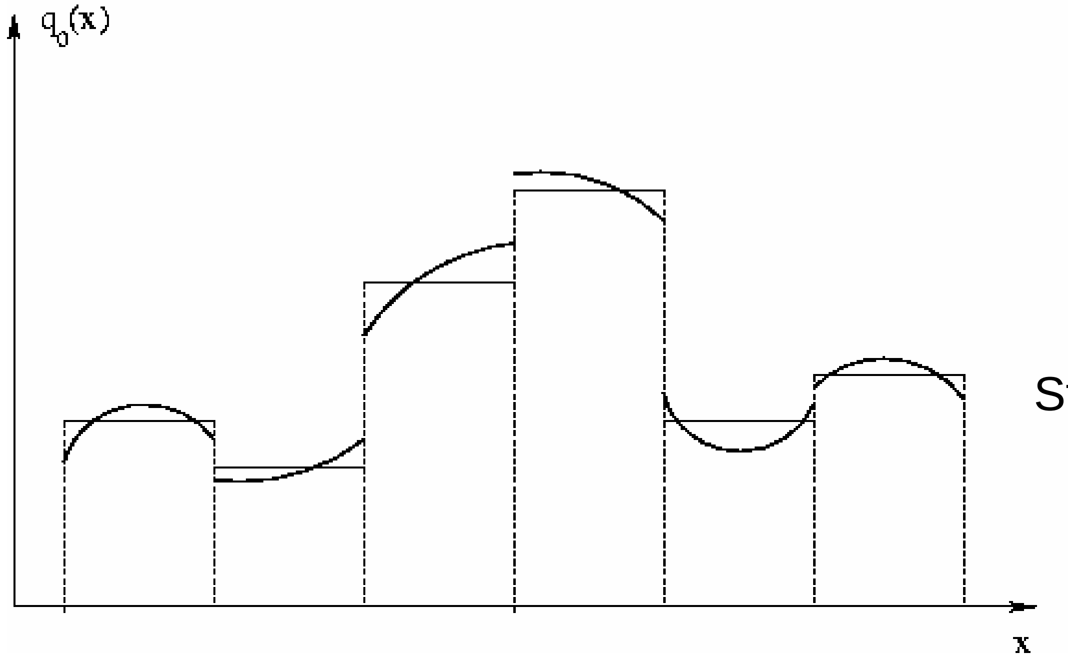
FV - Diskretisierung



Problem: Werte an den Zellgrenzen (zentrale Eingangsgröße in die Riemannlöser) weichen von den tatsächlichen stark ab
➡ Diskretisierung 1. Ordnung

Ansatz für Höhere Ordnung: Rekonstruktion

- Berechne lokale Werte an den Gitterzellgrenzen aus den integralen Mittelwerten
- Benötigt: Verlauf der Zustandsgrößen innerhalb der Zelle

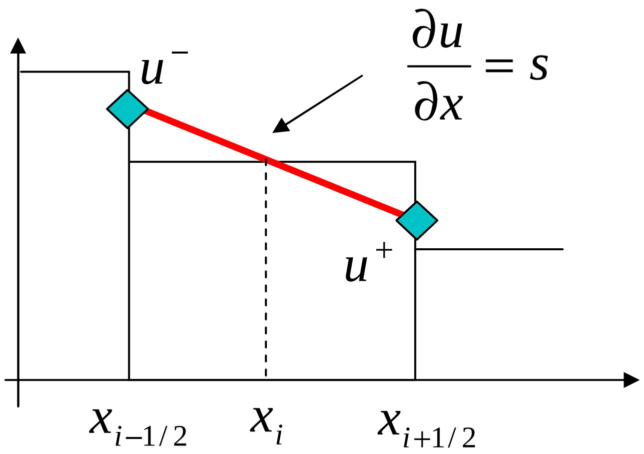


Stückweise polynomial

Rekonstruktion im Raum in 1D (MUSCL – B. van Leer 1979)

Monotone Upstream-centred Schemes for Conservation Laws

Ansatz: Statt der stückweise konstanten Verteilung des Zellinhalts wird nun eine stückweise lineare Verteilung innerhalb der Zelle angenommen. Der integrale Zellmittelwert muss dabei unverändert bleiben.



$$u(x) = \overline{u}_i + s(x - x_i)$$

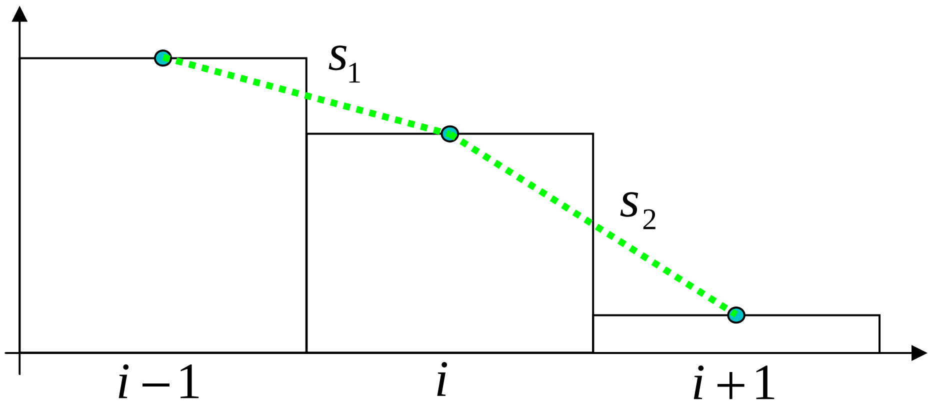
$$u_i^+ = \overline{u}_i + s\frac{\Delta x}{2}$$

$$u_i^- = \overline{u}_i - s\frac{\Delta x}{2}$$

Problem: Das Finite-Volumen-Verfahren bietet in der bisherigen Form keinerlei Möglichkeit, Informationen über diese Verteilung zu speichern.

Rekonstruktion im Raum: Steigungsberechnung

Vorgehen: Da keine Informationen innerhalb der Zelle (außer dem integralen Mittelwert) vorliegen, wird die Verteilung mit Hilfe der Nachbarzellen rekonstruiert, indem zunächst Gradienten (s_1,s_2) zu den Nachbarzellen berechnet werden, mit deren Hilfe die Verteilung innerhalb der Zelle bestimmt wird.



$$s_1 = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x}$$

$$s_2 = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x}$$

Problem: Welcher der beiden Gradienten soll zur Rekonstruktion des Zellzustands verwendet werden?

Rekonstruktion im Raum: Steigungsberechnung (TVD-Eigenschaft)

Mathematische Theorie für skalare Erhaltungsgleichungen
TVD-Eigenschaft (Total Variation Diminishing)

$$\sum_{all\ i} \left| u_{i+1}^{n} - u_{i}^{n} \right| \leq \sum_{all\ i} \left| u_{i+1}^{0} - u_{i}^{0} \right|$$

- Maxima werden nicht größer
- Minima werden nicht kleiner

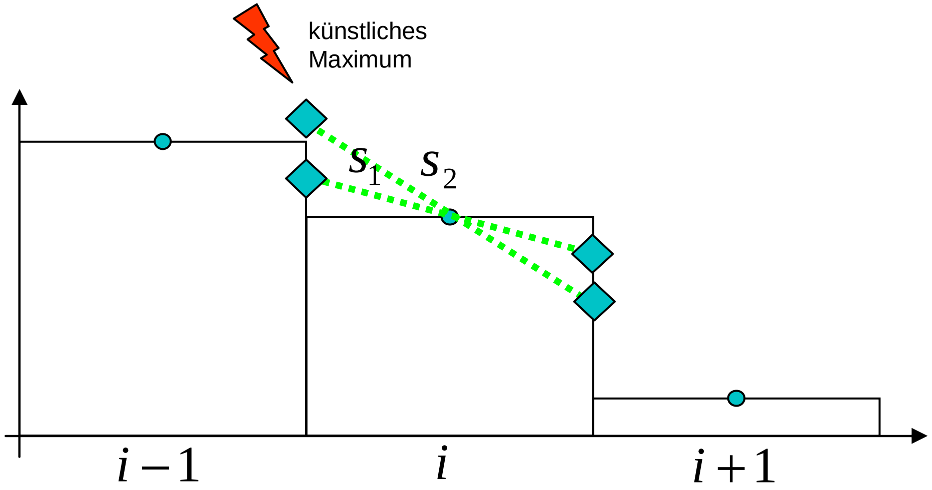
Hinreichende Bedingung (A. Harten, 1983)

$$0 \leq \left\{ \frac{\Delta x\, s_i}{u_i - u_{i-1}}, \frac{\Delta x\, s_i}{u_{i+1} - u_i} \right\} \leq 2$$

Anschauliche Deutung der TVD-Eigenschaft

Was heißt das letztendlich?

- Keine neuen Minima oder Maxima dürfen entstehen:



Die rekonstruierten Steigungen müssen „limitiert“ werden.

Rekonstruktion im Raum: Limiter

1. Minmod-function

$$s_i = \frac{1}{\Delta x} \operatorname{minmod}\left(u_{i+1} - u_i , u_i - u_{i-1}\right)$$

$$\operatorname{minmod}(a , b) = \begin{cases} a & \textit{für} \quad |a| < |b| , ab > 0 \\ b & \textit{für} \quad |a| \geq |b| , ab > 0 \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

2. Sweby's slope calculation

$$s_k(a ,b) = sign(a) \max\left\{\left|\operatorname{minmod}(a , kb)\right| , \left|\operatorname{minmod}(ka , b)\right|\right\}$$

$$\text{mit} \quad 1 \leq \text{k} \leq 2$$

Rekonstruktion in mehreren Raumdimensionen

Kartesische Gitter:

1D-Schema kann sukzessive für jede Raumdimension ausgeführt werden, die verschiedenen Richtungen beeinflussen sich nicht.

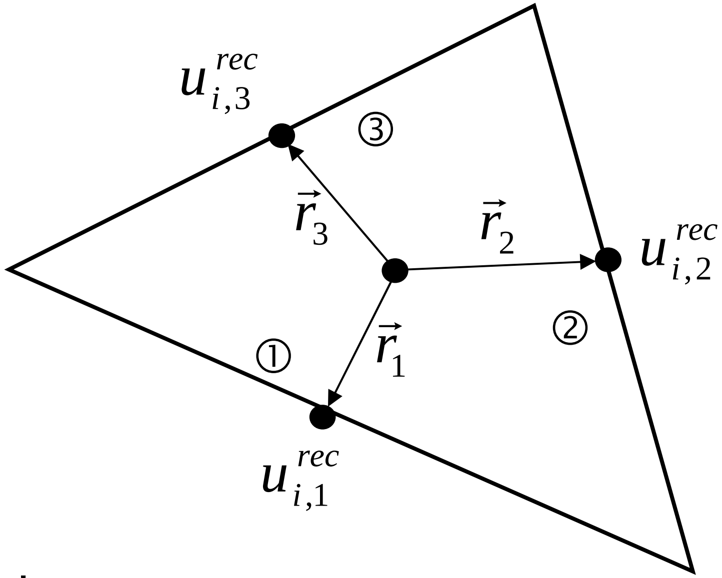
Unstrukturierte Gitter:

Deutlich aufwändiger zu realisieren:
Die Richtungen können nicht mehr getrennt voneinander behandelt werden und es sind andere, deutlich kompliziertere Limiter notwendig.

Rekonstruktion auf unstrukturierten Gittern

Raumrekonstruktion nach Barth & Jespersen:

$$u_{i.m}^{rec} = u_i + \nabla u_i \cdot \vec{r}_m$$



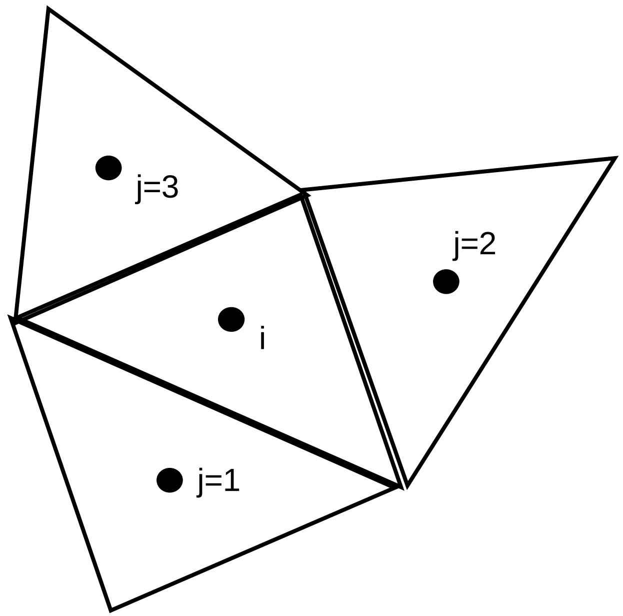
Limitierung erforderlich!

$$u_{i.m}^{rec} = u_i + \psi_i \nabla u_i \cdot \vec{r}_m$$

Gradientenberechnung auf unstrukturierten Gittern

Berechnung über die Least-Squares-Methode:

$$M^T M \nabla u_i = M^T \tilde{u}$$



$$\tilde{u} = \begin{pmatrix} u_{j=1} - u_i \\ u_{j=2} - u_i \\ \vdots \\ u_{j=N} - u_i \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} \Delta x_{j=1} & \Delta y_{j=1} & \Delta z_{j=1} \\ \Delta x_{j=2} & \Delta y_{j=2} & \Delta z_{j=2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta x_{j=N} & \Delta y_{j=N} & \Delta z_{j=N} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\nabla u_i = W_i \tilde{u}} \qquad \text{mit} \qquad W_i = \left(M^T M\right)^{-1} M^T$$

Die Matrix W_i wird vorab für jede Zelle berechnet und abgespeichert.
Die Rekonstruktion des Gradienten in jedem Zeitschritt ist dann nur noch eine Matrix-Vektor-Multiplikation.

Limitierung auf unstrukturierten Gittern

Limiter von Barth und Jespersen:

Benötigt werden:

1. Maximum der vier beteiligten Zellen:

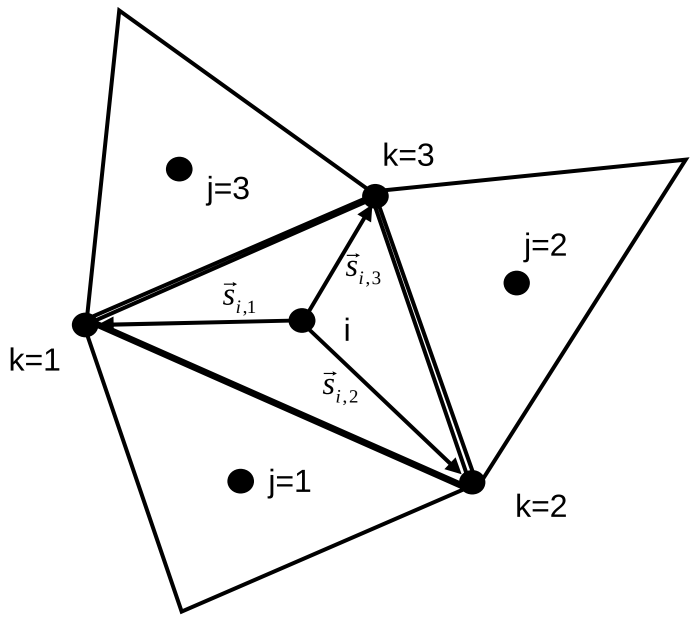
$$u_{\max} = \max\left(u_i, u_{j=1}, \ldots, u_{j=N}\right)$$

2. Minimum der vier beteiligten Zellen:

$$u_{\min} = \min\left(u_i, u_{j=1}, \ldots, u_{j=N}\right)$$

3. Vektoren vom Baryzentrum der Zelle zu den Knotenpunkten:

$$\vec{s}_{i,k}, \quad k = 1 \ldots N$$



Ablauf:

Ermittlung eines Faktors ψ_k an jedem Knoten : k

$$\psi_k = \begin{cases} \min\left(1, \dfrac{u_{\max} - u_i}{\nabla u_i \cdot \vec{s}_{i,k}}\right) & \text{falls } \nabla u_i \cdot \vec{s}_{i,k} > 0 \\ \min\left(1, \dfrac{u_{\min} - u_i}{\nabla u_i \cdot \vec{s}_{i,k}}\right) & \text{falls } \nabla u_i \cdot \vec{s}_{i,k} < 0 \\ 1 & \text{falls } \nabla u_i \cdot \vec{s}_{i,k} = 0 \end{cases}$$

Der limitierte Gradient ergibt sich dann durch:

$$\nabla u_i^{(\mathrm{lim})} = \min{}_k (\psi_k) \nabla u_i$$