CFD-Programmier-Seminar

Projekt 6: Die Cauchy-Kovalevskaya Prozedur

Für die Zeitdiskretisierung zweiter Ordnung soll in dieser Aufgabe die Cauchy-Kovalevskaya Prozedur implementiert werden.

Programmierarbeiten

Die folgenden Arbeitspunkte sind im Code CFDFV umzusetzen:

- Space-Time-Expansion (Raum-Zeit-Diskretisierung) auf Basis der Cauchy-Kovalevskaya-Prozedur (CK-Prozedur)

Die Zeitdiskretisierung findet in der Datei `CalcCFDFV.f90` statt, die CK-Prozedur ist in der Datei `CauchyKovalevskaya.f90` abgelegt. In dieser Aufgabe soll lediglich die Datei `CauchyKovalevskaya.f90` bearbeitet werden, auch wenn wir uns mit der Zeitdiskretisierung befassen. An dem Konstrukt der Zeitdiskretisierung ändert sich im Falle der CK-Prozedur nichts, da auch hier lediglich die berechneten Flüsse mit dem Zeitschritt multipliziert werden.

Validierung

Untersuchen und vergleichen Sie die beiden Zeitdiskretisierungsmethoden. Hierbei sind die folgenden Punkte von Relevanz:

- Einfluss der Zeitdiskretisierung auf das Konvergenzverhalten bei stationären Problemen

Verwenden Sie für Ihre Untersuchungen folgende Testfälle:

- 1D-Riemannprobleme
- Sinuswelle
- Profilumströmung

Führen Sie für die Sinuswelle eine Konvergenzstudie durch und zeigen Sie anhand der L_2-Fehlernorm, dass die CK-Prozedur eine Konvergenzordnung von 2 besitzt.

Implementierung der STE

Die Space-Time-Expansion basiert auf der Idee, das Zeitintegral mit einer Quadraturformel höherer Ordnung zu lösen. Integriert wird hierbei das Randintegral über die Flüsse. Für ein Verfahren zweiter Ordnung ist dies sehr einfach zu bewerkstelligen, denn die Quadraturformel benötigt nur eine Auswertung des Zustands in Raum und Zeit. Man kann dies folgendermaßen ausdrücken:

$$\int_{t^n}^{t^n+\Delta t} \int_{L_{ij}} g\left(U_i(x,y,t), U_j(x,y,t)\right) ds dt = L_{ij}\ \Delta t\ g\left(U_i(x_{GP}, y_{GP}, t^n + \Delta t/2), U_j(x_{GP}, y_{GP}, t^n + \Delta t/2)\right),$$

wobei x_{GP} und y_{GP} die Koordinaten des jeweiligen Seitenmittelpunkts sind. Die Zustände $U_i(x_{GP}, y_{GP}, t^n + \Delta t/2)$ bzw. $U_j(x_{GP}, y_{GP}, t^n+\Delta t/2)$ erhält man jeweils durch eine Raum-Zeit-Taylorentwicklung um den Zustand im Baryzentrum zum Zeitpunkt t^n in den jeweiligen Zellen. Diese Entwicklung lautet allgemein formuliert:

$$U(x,y,t) = U(x_{Bary}, y_{Bary}, t^n) + U_x(x_{Bary}, y_{Bary}, t^n)r_1 + U_y(x_{Bary}, y_{Bary}, t^n)r_2 + U_t(x_{Bary}, y_{Bary}, t^n)\Delta t/2,$$

wobei r_1 und r_2 die Vektoren vom Baryzentrum zum jeweiligen Seitenmittelpunkt sind. Die Zeitableitung wird über die Cauchy-Kovalevskaya-Prozedur berechnet. Diese basiert darauf, dass man hierbei nur innerhalb der Zelle operiert und deshalb Stetigkeit voraussetzen kann. Auf diese Art und Weise kann man die Differenzialgleichung verwenden. Die Zeitableitung erhalten wir einfach, indem wir den räumlichen Term auf die rechte Seite ziehen:

$$u_t + f(u)_x = 0 \qquad \Rightarrow u_t = -f(u)_x \tag{1}$$

Im Code passiert die Rekonstruktion aus Stabilitäts- und Effizienzgründen in primitiven Variablen. Die Zeitableitungen dieser Variablen lauten also:

$$\begin{aligned}
\rho_t &= -\left(v_1\rho_x + v_2\rho_y + \rho\left(v_{1_x} + v_{2_y}\right)\right)\\
v_{1_t} &= -\left(v_1 v_{1_x} + v_2 v_{1_y} + \frac{p_x}{\rho}\right)\\
v_{2_t} &= -\left(v_1 v_{2_x} + v_2 v_{2_y} + \frac{p_y}{\rho}\right)\\
p_t &= -\left(v_1 p_x + v_2 p_y + \gamma p\left(v_{1_x} + v_{2_y}\right)\right)
\end{aligned} \tag{2}$$

Programmierarbeiten

Die folgenden Arbeitspunkte sind im Code CFDFV umzusetzen:

1. Cauchy-Kovalevskaya Prozedur (CK-Prozedur):
   Die CK-Prozedur ist in der Datei `CauchyKovalevskaya.f90` abgelegt. Dabei werden die Zeitableitungen der Zustandsgrößen wie oben beschrieben berechnet. Dafür programmieren Sie eine Schleife über alle Elemente.

2. Space-Time-Expansion (Raum-Zeit-Diskretisierung) auf Basis der Cauchy-Kovalevskaya-Prozedur:
   Um den Zustand an den Seitenmittelpunkten für $t_{n+1/2}$ wird in der `CauchyKovalevskaya.f90` auch noch die Taylorentwicklung ausgewertet. Dafür programmieren Sie eine Schleife über alle Seiten eines Elements und verwenden die soeben berechnete Zeitableitung. Achten Sie darauf, dass der Zeitschritt in der Auswertung nur $\Delta t/2$ beträgt!
   Da die Mittelpunktsregel von der Implementierung analog zur Rechteckregel ist, mit dem Unterschied, dass die Flussberechnung zum Zeitpunkt $t_{n+1/2}$ vorgenommen wird, ändert sich in der Zeitdiskretisierung (`CalcCFDFV.f90`) nichts. Mit der ausgwerteten Taylorreihe auf den Seitenmittelpunkten zum Zeitpunkt $t_{n+1/2}$ ergibt sich das Flussintegral bereits automatisch.