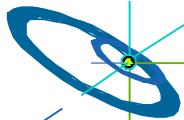


Approximative Riemannlöser und andere Flußfunktionen

C.-D. Munz, M. Atak, A. Stock

Universität Stuttgart
Institut für Aerodynamik und Gasdynamik (IAG)
www.iag.uni-stuttgart.de



CFDFV-Seminar

Munz, Atak, Stock
Universität Stuttgart

IAG

H

L

R

I

S

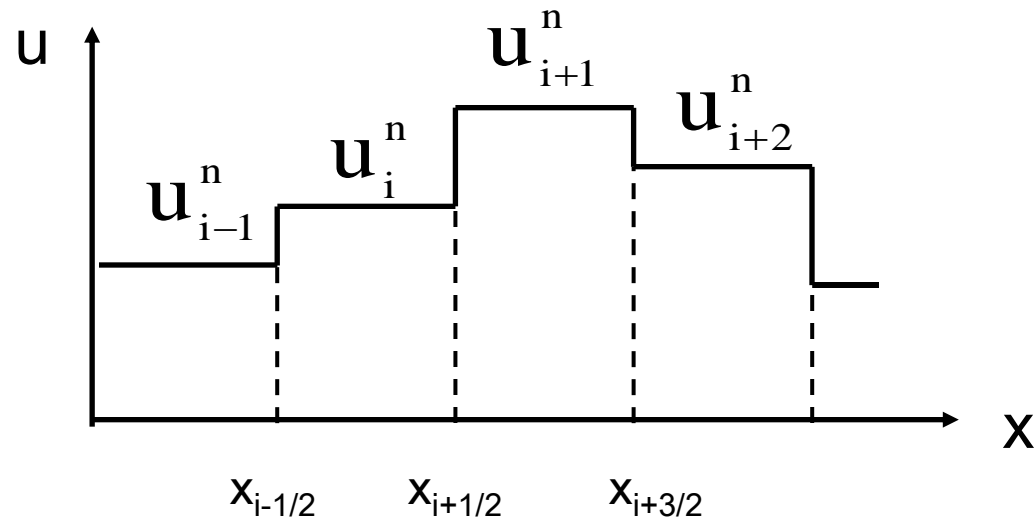


Die Berechnung des numerischen Flusses

1. Die Idee von Godunov
2. Vereinfachungen: Approximative Riemannlöser
3. Das Roe-Verfahren
4. Das HLL-Verfahren



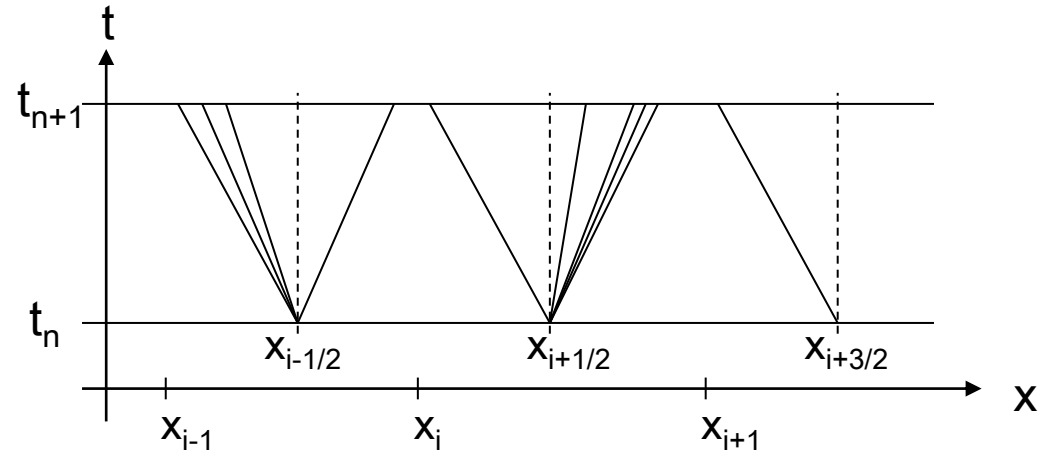
Godunov's Idea in einer Raumdimension



Stückweise konstante Werte in jeder Zelle
Löse Riemann-Problem an jeder Zellkante



Formulierung als Finite Volumen Verfahren



$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (g_{i+1/2}^n - g_{i-1/2}^n) \quad \text{FV-scheme}$$

$$g_{i+1/2}^n = f(u_{RP}(0; u_i, u_{i+1}))$$



Die Methode von Godunov

Numerischer Fluß der Godunov-Methode:

$$g_{i+1/2}^n = f(u_{RP}(0; u_i, u_{i+1}))$$

u_{RP} : Lösung des Riemann-Problem an der Zellkante

Eigenschaften des Godunov-Verfahrens:

- Exakte Erhaltung
- Nichtlineare Wellenausbreitung
- Adaptivität

Stabilität: CFL-Bedingung



Die Roe Linearisierung

P. Roe (1981): Ersetze die exakte Lösung durch die exakte Lösung des folgenden linearisierten Riemann Problems:

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{A}_{lr} \mathbf{u}_x = 0, \quad \mathbf{u}(x,0) = \begin{cases} \mathbf{u}_l & \text{für } x < 0 \\ \mathbf{u}_r & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

Die Matrix $\mathbf{A}_{lr} = \mathbf{A}_{lr}(\mathbf{u}_l, \mathbf{u}_r)$ heißt Roe-Matrix, wenn

1. $\mathbf{A}_{lr}(\mathbf{u}_l, \mathbf{u}_r) = \mathbf{A}(\bar{\mathbf{u}})$
2. \mathbf{A}_{lr} ist diagonalisierbar (d.h. hyperbolisch)
3. \mathbf{A}_{lr} erfüllt die Mittelwertseigenschaft:

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}_r) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_l) = \mathbf{A}_{lr} (\mathbf{u}_r - \mathbf{u}_l)$$



Fluß und Jacobi-Matrix für die 1D Euler-Gleichungen

$$u_t + f(u)_x = 0 \Leftrightarrow u_t + A(u)u_x = 0$$

$$f(u) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ v(e + p) \end{pmatrix} \quad A(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2}v^2 & (3-\gamma)v & \gamma-1 \\ v\left(\frac{\gamma-1}{2}v^2 - H\right) & H - (\gamma-1)v^2 & \gamma v \end{pmatrix}$$

$$H = \frac{e+p}{\rho}, \quad c^2 = \gamma \frac{p}{\rho}, \quad p = (\gamma-1)\left(e - \frac{1}{2}\rho v^2\right)$$

Eigenwerte: $a_1=v-c$, $a_2=v$, $a_3=v+c$



Übung: Herleiten der Roe-Mittelwerte

$$f(u_r) - f(u_l) = A(\bar{u})(u_r - u_l)$$

$$\begin{pmatrix} \rho_r v_r \\ \rho_r v_r^2 + p_r \\ v_r(e_r + p_r) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_l v_l \\ \rho_l v_l^2 + p_l \\ v_l(e_l + p_l) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2} \bar{v}^2 & (3-\gamma)\bar{v} & \gamma-1 \\ \bar{v} \left(\frac{\gamma-1}{2} \bar{v}^2 - \bar{H} \right) & \bar{H} - (\gamma-1)\bar{v}^2 & \gamma \bar{v} \end{pmatrix} (u_r - u_l)$$

Eigenwerte: $a_1=v-c$, $a_2=v$, $a_3=v+c$



Roe-Mittelwerte für ein ideales Gas

Roe-Matrix $A_{lr}(u_l, u_r) = A(\bar{u})$

mit
$$\bar{\rho} = \frac{\rho_r + \rho_l}{\sqrt{\rho_r} + \sqrt{\rho_l}} \quad \bar{v} = \frac{\sqrt{\rho_r} v_r + \sqrt{\rho_l} v_l}{\sqrt{\rho_r} + \sqrt{\rho_l}},$$

$$\bar{H} = \frac{\sqrt{\rho_r} H_r + \sqrt{\rho_l} H_l}{\sqrt{\rho_r} + \sqrt{\rho_l}}, \quad \bar{c}^2 = (\gamma - 1) \left(\bar{H} - \frac{1}{2} \bar{v}^2 \right)$$



System von linearen Transportgleichungen

Die Matrix A ist diagonalisierbar, d.h. es gibt eine Matrix R mit:

$$\Rightarrow \Lambda = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Ähnlichkeits-} \\ \text{transformation}}}{R^{-1}} A R = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_m \end{pmatrix} = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_m)$$

R ist die Matrix der Eigenvektoren: $R = (r_1, \dots, r_m)$

r_i Eigenvektor zum Eigenwert a_i , d.h. $A r_i = a_i r_i$



Warum Linearisierung?

Antwort: $\mathbf{R}^{-1} \cdot \left| \quad \mathbf{u}_t + \mathbf{A} \mathbf{u}_x = 0 \right.$

$$\mathbf{R}^{-1} \mathbf{u}_t + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{u}_x = 0$$

$$\mathbf{R}^{-1} \mathbf{u}_t + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{R} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{u}_x = 0$$

$$(\mathbf{R}^{-1} \mathbf{u})_t + \underbrace{\mathbf{R}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{R}}_{\Lambda} (\mathbf{R}^{-1} \mathbf{u})_x = 0$$

$\mathbf{w} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{u}$ charakteristische Variablen

$\mathbf{w}_t + \Lambda \mathbf{w}_x = 0$ charakteristische Normalform

m entkoppelte SKALARE lineare Transportgleichungen



Lösung des linearisierten Riemann-Problems

1. Transformation: $u_r - u_l = R(w_r - w_l), \quad u_r - u_l = \sum_{k=1}^3 \gamma_k r_k$

=> Bestimmung der Komponenten der charakteristischen Variablen γ :

$$\gamma_1 = -\frac{1}{2\bar{c}} [\Delta m_1 - \Delta \rho (\bar{v}_1 + \bar{c})] - \frac{1}{2} \gamma_2$$

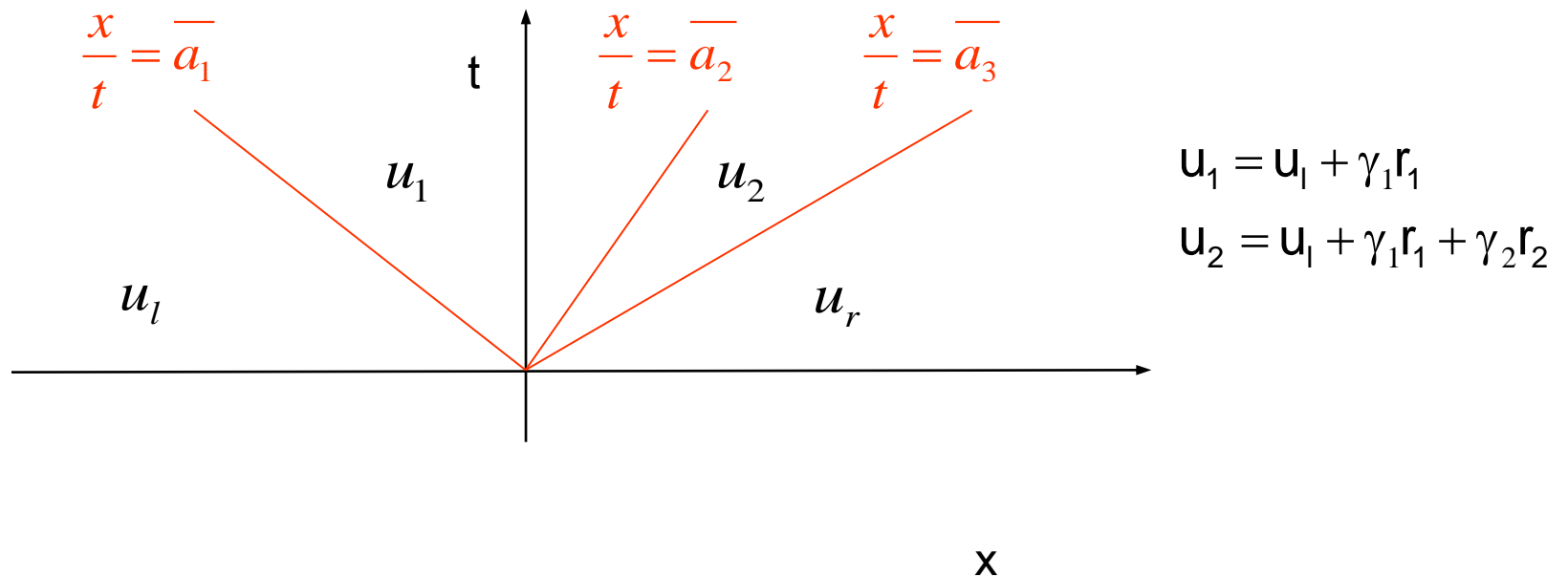
$$\gamma_2 = -\frac{\gamma - 1}{\bar{c}^2} [\Delta \rho (\bar{v}_1^2 - H) - \bar{v}_1 \Delta m_1 + \bar{\Delta e}]$$

$$\gamma_3 = \Delta \rho - \gamma_1 - \gamma_2$$



Lösung des linearisierten Riemann-Problems

2. Die vier konstanten Zustände



Numerischer Fluß des Roe-Schemas

Damit erhält man

$$g_{i+\frac{1}{2}} = f(u_i) + \sum_{k=1}^3 a_k^- \gamma_k r_k$$

$$g_{i+\frac{1}{2}} = f(u_{i+1}) - \sum_{k=1}^3 a_k^+ \gamma_k r_k$$

Üblicherweise nimmt man den Mittelwert

$$g_{\text{Roe}}(u_i, u_{i+1}) = \frac{1}{2} (f_{i+1} + f_i) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 |a_k| \gamma_k r_k$$

Zentrale Differenz

Korrektur gemäß
Wellenausbreitung



Eigenschaften des Roe-Schemas

Eine einzelne Stoßwelle oder eine einzelne Kontaktunstetigkeit wird exakt aufgelöst.

Das Roe-Verfahren kann an starken Verdünnungen die Konsistenz mit der Entropiebedingung verletzen.

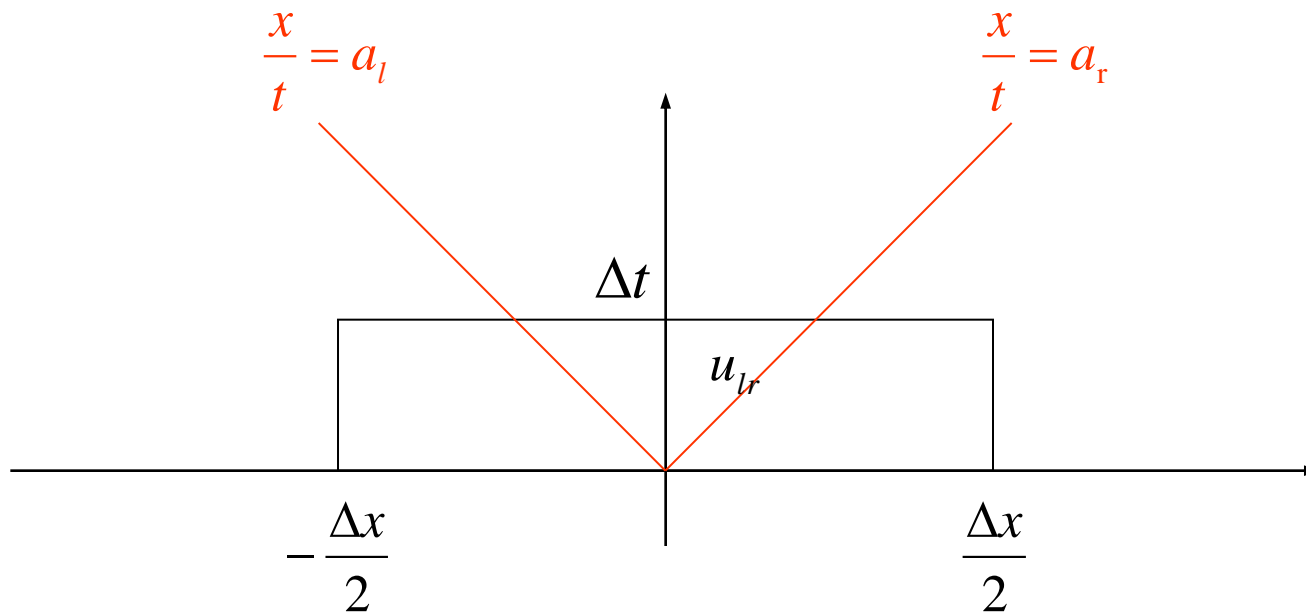
Unterschätzen der Wellengeschwindigkeiten an Verdünnungen.

Entropy-fix:
$$\tilde{\mathbf{a}}_{1,3} = \begin{cases} \bar{\mathbf{a}}_{1,3} & \text{für } |\mathbf{a}_{1,3}| > \delta \\ \delta & \text{sonst} \end{cases}$$



The Method of Harten, Lax and Van Leer

Einfachstes Godunov-Typ Verfahren



Der Riemann-Löser nach Harten, Lax, van Leer (HLL) I

Weitere Vereinfachung gegenüber Roe-Löser:

Nur noch ein mittlerer Zustand

$$w\left(\frac{x}{t}; u_l; u_r\right) = \begin{cases} a_l & \text{for } \frac{x}{t} < a_l \\ a_{lr} & \text{for } a_l \leq \frac{x}{t} \leq a_r \\ a_r & \text{for } \frac{x}{t} > a_r \end{cases}$$

a_l, a_r kleinste und größte Wellengeschwindigkeit

a_{lr} mittlerer Zustand



Der Riemann-Löser nach Harten, Lax, van Leer (HLL) II

Konsistenz mit der integralen Erhaltung

$$u_{lr} = \frac{a_r u_r - a_l u_l - f(u_r) + f(u_l)}{a_r - a_l}$$

Numerischer Fluß:

$$g_{\text{HLL}}(u_l, u_r) = \frac{a_r^+ f(u_l) - a_l^- f(u_r)}{a_r^+ - a_l^-} + \frac{a_r^+ a_l^-}{a_r^+ - a_l^-} (u_r - u_l)$$

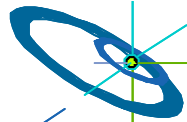
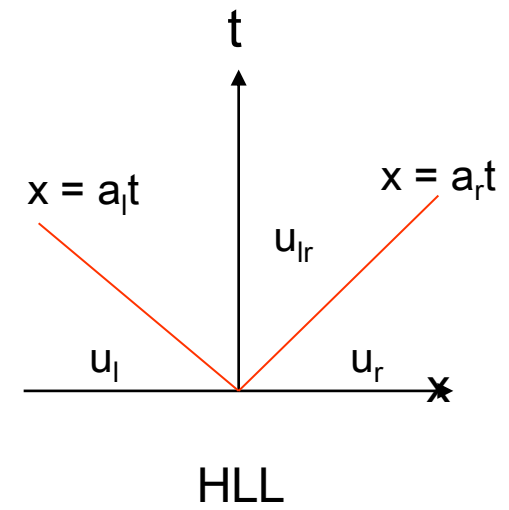
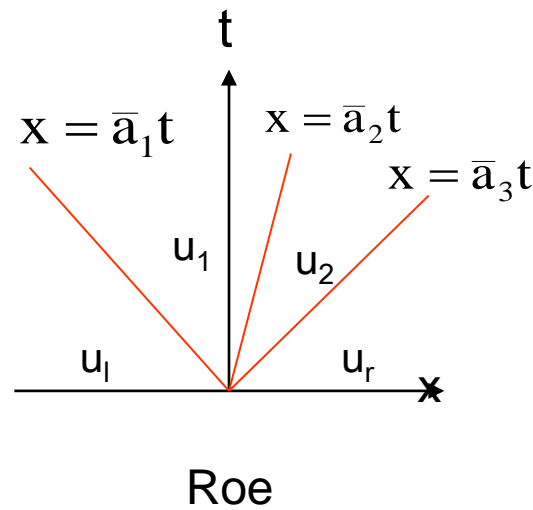
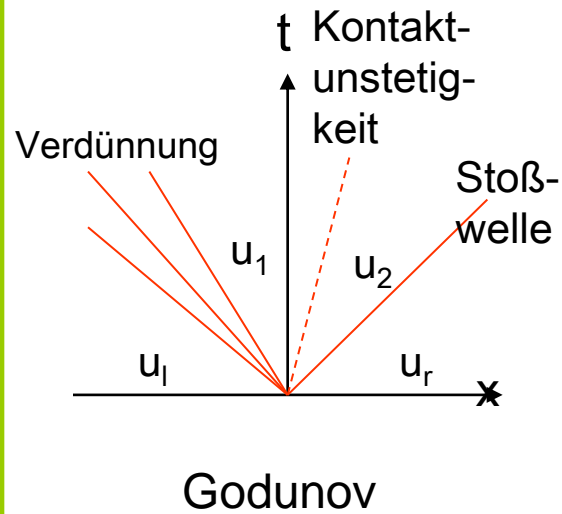
Berechnung der Signalgeschwindigkeiten:

$$a_l^+ = \min \{v_l - c_l, \bar{v} - \bar{c}, 0\}$$

$$a_r^- = \max \{v_r - c_r, \bar{v} + \bar{c}, 0\}$$



Überblick Riemann-Löser



Flux-Vector Splitting Methods

Aufspaltung des Flusses $f(\mathbf{u}) = f^-(\mathbf{u}) + f^+(\mathbf{u})$

left right

mit

non-negative EW $A^+(\mathbf{u}) = \frac{df^+(\mathbf{u})}{d\mathbf{u}}$

non-positive EW $A^-(\mathbf{u}) = \frac{df^-(\mathbf{u})}{d\mathbf{u}}$

Numerischer Fluß

$$g(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{i+1}) = f^+(\mathbf{u}_i) + f^-(\mathbf{u}_{i+1})$$




Flux-Vector Splitting nach Steger & Warming I

Euler Theorem:

Fluß der Euler-Gleichungen ist homogen vom Grad 1:

$$f(\alpha u) = \alpha f(u) \quad \text{for all } \alpha \in \mathfrak{R}$$

 $f(u) = A(u)u \quad A(u) \equiv \frac{df(u)}{du}$

Idee: Diagonalisierung der Jacobi-Matrix $A(u)$, Aufspalten der Diagonalmatrix in eine „positive“ und ein „negative“




Flux-Vector Splitting nach Steger & Warming II

Diagonalisierung $A = R^{-1} \Lambda R$ mit $\Lambda := \text{diag}(v - c, v, v + c)$

Splitten von $\Lambda = \Lambda^+ + \Lambda^-$, mit $\Lambda^+ := \text{diag}(a_1^+, a_2^+, a_3^+)$
mit $\Lambda^- := \text{diag}(a_1^-, a_2^-, a_3^-)$

Splitten des Flusses: $f^\pm(\mathbf{u}) \equiv A^\pm(\mathbf{u})\mathbf{u}$

 $g(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{i+1}) = f^+(\mathbf{u}_i) + f^-(\mathbf{u}_{i+1})$



Flux-Vector Splitting nach Steger & Warming III

$f_{1,1}^{\pm}$	$\frac{\rho}{2\gamma} (2(\gamma - 1) \cdot a_2^{\pm} + a_1^{\pm} + a_4^{\pm})$
$f_{1,2}^{\pm}$	$f_{1,1}^{\pm} \cdot v_1 + (a_4^{\pm} - a_1^{\pm}) \cdot \frac{\rho c}{2\gamma}$
$f_{1,3}^{\pm}$	$f_{1,1}^{\pm} \cdot v_2$
$f_{1,4}^{\pm}$	$f_{1,1}^{\pm} \cdot \frac{v_1^2 + v_2^2}{2} + (a_4^{\pm} - a_1^{\pm}) \cdot \frac{\rho c v_1}{2\gamma} + (a_4^{\pm} + a_1^{\pm}) \cdot \frac{\rho c^2}{2(\gamma - 1)\gamma}$

Steger-Warming Fluß in x-Richtung



Flux-Vector Splitting nach van Leer in x-Richtung

Machzahl M	Fluß nach rechts	Fluss nach links
$M \geq 1$	$F_1^+ = F_1$	$F_1^- = 0$
$-1 < M < 1$	$F_{1,1}^+ = \frac{\rho c}{4} (M+1)^2, M = \frac{v_1}{c}$ $F_{1,2}^+ = F_{1,1}^+ \cdot \frac{C_1}{\gamma}$ $F_{1,3}^+ = F_{1,1}^+ \cdot v_2$ $F_{1,4}^+ = F_{1,2}^+ \cdot C_1 \cdot \frac{\gamma}{2(\gamma^2 - 1)} + \frac{1}{2} F_{1,3}^+ \cdot v_2$ <p>mit $C_1 = (\gamma - 1) \cdot v_1 + 2c$</p>	$F_{1,1}^- = -\frac{\rho c}{4} (1 - M)^2, M = \frac{v_1}{c}$ $F_{1,2}^- = F_{1,1}^- \cdot \frac{C_1}{\gamma}$ $F_{1,3}^- = F_{1,1}^- \cdot v_2$ $F_{1,4}^- = F_{1,2}^- \cdot C_1 \cdot \frac{\gamma}{2(\gamma^2 - 1)} + \frac{1}{2} F_{1,3}^- \cdot v_2$ <p>mit $C_1 = (\gamma - 1) \cdot v_1 - 2c$</p>
$M \leq -1$	$F_1^+ = 0$	$F_1^- = F_1$



Flußberechnung

Upwind differencing

Godunov-type schemes

Godunov, Roe, HLL, Osher

Flux-vector Splitting schemes

Steger-Warming, van Leer, AUSM, ...

Stückweise konstante Werte

→ Erster Ordnung genau, recht ähnliche Ergebnisse

